Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat

Második zárthelyi (2023. május 9.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze.

1. Legyenek v és w egységvektorok egy valós euklideszi térben, melyek szöge 60 fok. Mennyi lesz $\|3v - w\|$ és $\|3v + w\|$?

2. Legyen A az a lineáris transzformáció $\mathbb{C}^3$-ben, mely az $(a, b, c)^T$ vektorhoz a $(b, -c, a)^T$ vektort rendeli. Döntsük el, hogy ez a transzformáció normális-e, unitér-e, önadjungált-e, és határozzuk meg az $\langle (1, i, 1)^T, A\big((1, i, 1)^T\big)\rangle$ skaláris szorzat értékét.

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix minimálpolinomját és Jordan-alakját.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Mely $b \in \mathbb{R}$ értékekre lesz a $9x^2 + 2bxy + y^2$ valós kvadratikus alak pozitív szemidefinit (de nem pozitív definit)? Határozzuk meg ezekben az esetekben az ONB-ben vett négyzetösszeg alakját.

5. Legyen W az $x + 2y - z = 0$ és $2x - y - z = 0$ egyenletekkel megadott egyenes $\mathbb{R}^3$-ben. Adjunk meg két olyan merőleges egységvektort, amelyek merőlegesek W-re is.

6. Számítsuk ki az alábbi M mátrix sajátaltereinek dimenzióját. Mely $b \in \mathbb{C}$ értékek esetén diagonalizálható M komplex fölött?

$$\begin{bmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$