Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat
Első absztrakt algebra feladatsor

1. ***(K4.2.25)*** Ismétlés: Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

$$(1234)(35)(1432)(35)\,, \quad (12345)(234)(12345)^{-1}\,, \quad [(12)(23)(34)]^{1222}\,.$$

Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \ldots, n\}$-en értelmezett „hátulról előre” permutációval is.

2. ***(K4.2.23)*** Igazoljuk, hogy $(x_1 \ldots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3)\ldots(x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$.

3. ***(K4.8.14)*** Mutassuk meg, hogy ha $(x_1 \ldots x_k)$ egy ciklus az S_n csoportban, és $f \in S_n$, akkor $f \circ \big(x_1 \ldots x_k\big) \circ f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big)$.

4. ***(K4.1.23)*** Igazoljuk, hogy a D_n diédercsoportban $f^i(tf^j) = tf^{j-i}$.

5. ***(K4.3.29)*** Határozzuk meg $\mathbb{Z}_m^+$ és $\mathbb{Z}_m^\times$ elemeinek a rendjeit, ahol $m = 7$, 8, 12.

6. ***(K4.3.30)*** Határozzuk meg a g elem rendjét a G csoportban, ha $G = \mathbb{R}^+$, $g = -1$; $G = \mathbb{R}^\times$, $g = -1$; $G = \mathbb{Z}_{19}^+$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{19}^\times$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{32}^+$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{32}^\times$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^+$, $g = x + 1$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^\times$, $g = 5$.

7. ***(K4.3.33)*** Hány 2, 3, 4, 5, 6, illetve 12 rendű elem van A_7-ben?

8. ***(K4.3.39)*** Mutassuk meg, hogy ha g és h relatív prím rendű, fölcserélhető elemei egy csoportnak, akkor $o(gh) = o(g)o(h)$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?

9. ***(K4.3.40)*** Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G kommutatív. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?

10. ***(K4.3.41*)*** Mutassuk meg, hogy $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$ (a, n, m pozitív egész).

11. ***(K4.3.34)*** Mely véges csoportokban nincs prímrendű elem?

12. ***(K4.3.37)*** Igaz-e tetszőleges G csoportban, hogy ha G-ben van d rendű elem, akkor ezek száma legalább $\varphi(d)$? És az, hogy pontosan $\varphi(d)$?

13. ***(K4.3.18, 4.3.21)*** Határozzuk meg a $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_{12}^+$ és $\mathbb{Z}_{17}^\times$ összes generátorelemét.

14. ***(K4.3.38)*** Ciklikus-e a 3-hatványadik komplex egységgyökök csoportja a szorzásra?

15. ***(K4.4.32*)*** Igazoljuk, hogy egy véges csoport rendje pontosan akkor páros, ha van másodrendű eleme.

16. ***(K4.4.25)*** Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával S_3, $\mathbb{Z}_{12}^+$ és a $\mathbb{Z}_{12}^\times$ összes részcsoportját, valamint az A_4 alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját.

17. ***(K4.4.15)*** Adjuk meg az S_3 szimmetrikus csoportban a $H = \{id, (12)\}$ részcsoport szerinti bal és jobb oldali mellékosztályokat, és igazoljuk, hogy $(123)H \neq H(123)$.

18. ***(K4.4.17)*** Igazoljuk, hogy $|\,\mathbb{Z}^+ : n\,\mathbb{Z}^+\,| = n$ (itt $n\,\mathbb{Z}^+$ az n-nel osztható egészekből áll).

19. ***(K4.1.16)*** Legyen r a $\overrightarrow{PP'}$ eltolás a síkon. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor grg^{-1} a $\overrightarrow{g(P)g(P')}$ eltolás.

20. ***(K4.1.17)*** Legyen t az e egyenesre való tükrözés. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor gtg^{-1} a $g(e)$ egyenesre való tükrözés.