**Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat**
*Harmadik absztrakt algebra feladatsor*

**1.** ***(K4.9.22)*** Adjuk meg a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoport összes negyedrendű elemét.

**2.** ***(K4.9.23)*** Mutassuk meg az elemek rendjeinek kiszámításával, hogy a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ és a $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoportok nem izomorfak.

**3.** ***(K4.9.25)*** Az alábbi csoportok közül melyek bonthatók direkt szorzatra? Igenlő válasz esetén adjunk meg egy felbontást: $\mathbb{Z}_6^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$, $S_3$, $D_4$, $D_6$, $Q$, $A_4$, $S_5$.

**4.** ***(K4.9.26)*** Hányféleképpen bontható föl két nemtriviális normálosztójának direkt szorzatára a $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ csoport?

**5.** ***(K4.9.30)*** Adjunk meg $S_8$-ban $S_4 \times S_4$-gyel izomorf részcsoportot.

**6.** ***(K4.9.13)*** Igazoljuk, hogy a gömb szimmetriacsoportja, azaz $\mathrm{O}(3)$ izomorf az $\mathrm{SO}(3)$ és a $\mathbb{Z}_2^+$ csoportok direkt szorzatával.

**7.** Bontsuk föl a $\mathbb{Z}_{11}^\times$ csoportot két prímhatványrendű ciklikus részcsoport direkt szorzatára. Adjuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_{36}^\times$ csoport prímhatványrendű ciklikusakra való felbontásában milyen rendű tényezők szerepelnek.

**8.** ***(K5.1.7)*** Legyen $I$ egy $T$ test fölötti $n \times n$-es mátrixgyűrűben azoknak a mátrixoknak a halmaza, melyeknek az első oszlopa végig nulla. Balideál-e, illetve jobbideál-e ez?

**9.** ***(K5.2.14)*** Készítsük el az alábbi faktorgyűrűk műveleti tábláit, majd osztályozzuk őket izomorfia szerint. (Ha $n$ egész, akkor $nR$ az $R$ gyűrű $\{nr \ : \ r \in R\}$ részgyűrűjét jelöli.) $\mathbb{Z}_4/\{0\}$, $\mathbb{Z}_8/\{0,4\}$, $\mathbb{Z}_{16}/\{0,4,8,12\}$, $2\,\mathbb{Z}/(8)$, $2\,\mathbb{Z}_{16}/(8)$, $\mathbb{Z}/(4)$, $4\,\mathbb{Z}/(16)$, $\mathbb{Z}[x]/(4,x)$.

**10.** ***(K5.2.15)*** A $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$-ben mi az $x+(x^2+x+1)$ inverze?

**11.** ***(K5.2.10)*** Írjuk föl az $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ faktorgyűrű műveleti tábláit, és igazoljuk, hogy testet kaptunk. Keressünk benne $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf $\{O, E\}$ résztestet (ahol $E$ az egységelem, $O$ a nullelem), és adjuk meg $L$-ben az $Ex^2 + Ex + E$ polinom gyökeit.

**12.** ***(K5.3.3, 5.3.18*)*** Igazoljuk, hogy ha $T$ test, akkor a $T^{n\times n}$ teljes mátrixgyűrű egyszerű gyűrű. Ha $R$ egységelemes, akkor írjuk le $R^{n\times n}$ ideáljait.

**13.** ***(K2.2.35)*** Igazoljuk, hogy az $a+b\sqrt{2}$ $(a,b \in \mathbb{Q})$ alakú számok résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

**14.** ***(K5.10.15)*** Határozzuk meg az alábbi számok minimálpolinomját a racionális test fölött: $\pi$, $1+i$, $\sqrt{2}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $1+\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $\cos 20°$, egy primitív $n$-edik egységgyök, ahol $n = 2,3,4,5,6$, illetve tetszőleges prímszám.

**15.** ***(K6.2.17)*** Igazoljuk, hogy ha $a$ és $b$ valós, akkor $a+bi$ pontosan akkor algebrai ($\mathbb{Q}$ fölött), ha $a$ is és $b$ is az.

**16.** ***(K6.2.18)*** Melyek algebraiak: $\pi+3$, $5\pi+6$, $\pi+\sqrt{2}$, $\pi^2+2\pi+2$, $\sqrt{\pi}$.

**17.** ***(K6.2.19)*** Egy algebrai szám és egy transzcendens szám összege mikor algebrai? És a szorzatuk? Egy algebrai szám négyzete lehet-e transzcendens? És a négyzetgyöke?

**18.** ***(K6.7.4)*** Igazoljuk, hogy a négyelemű test mindegyik eleme gyöke az $x^4 - x$ polinomnak.

**19.** ***(K5.11.12, 5.11.7, 5.11.14)*** Határozzuk meg az $i+j+k$ és $1+i+j$ kvaterniók négyzetét, inverzét és minimálpolinomját. Hányadfokú lehet egy kvaternió minimálpolinomja? Igazoljuk, hogy minden nem valós kvaterniónak pontosan két négyzetgyöke van $\mathbb{K}$-ban.