Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat
Második absztrakt algebra feladatsor

1. ***(K4.8.34)*** Igazoljuk, hogy a Lagrange-tétel megfordítása nem igaz, vagyis egy csoport rendjének egy d osztójához nem mindig létezik d elemű részcsoport.

2. ***(K4.7.7)*** Igazoljuk az alább megadott $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezésekről, hogy homomorfizmusok, majd határozzuk meg a magjukat és a képüket.
(1) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás, 1 ha x tengelyes tükrözés.
(2) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
(3) $G_1 = \mathbb{R}[x]^+$, $G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (vagyis φ az i behelyettesítése).

3. ***(K4.7.17)*** Jelölje K a komplex egységkört, P pedig a pozitív valós számok halmazát a szorzásra. A homomorfizmustétel alapján igazoljuk a következő izomorfizmusokat.
(1) $\mathbb{C}^\times / K \cong P$. Milyen geometriai alakzatok ennek a faktornak az elemei?
(2) $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.

4. ***(K4.7.27)*** Ciklikus-e a $\mathbb{Z}_{16}^\times$, illetve az $\{1, 15\}$ és az $\{1, 9\}$ szerinti faktorcsoportjai?

5. ***(K4.8.32)*** Normálosztó-e a $H \le G$ részcsoport:
(1) $G = D_6$, $H = \{f^2, f^4, f^6 = 1\}$.
(2) $G = D_6$, $H = \{1, f^3, t, tf^3\}$.
(3) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H a diagonális mátrixok halmaza.
(4) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból áll.
(5) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H a felső háromszögmátrixok halmaza.

6. ***(K4.8.38)*** Melyik korábbról már ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorcsoportok? $D_4/\{1, f^2\}$; $S_4/\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$; $D_8/\{1, f^2, f^4, f^6\}$.

7. ***(K4.8.39)*** Mutassuk meg, hogy az eltolások normálosztót alkotnak a sík egybevágósági transzformációinak $\mathrm{E}(2)$ csoportjában, és a szerinte vett faktor az $\mathrm{O}(2)$ csoporttal izomorf.

8. ***(K4.8.40)*** Legyen $N = \{e, a\}$ kételemű normálosztó a G csoportban. Igazoljuk, hogy minden $g \in G$-re $ga = ag$.

9. ***(K4.8.15, K4.8.33)*** Állapítsuk meg az alábbi csoportok konjugáltosztályait és normálosztóit: D_3, S_4, D_4, Q (a kvaterniócsoport), D_5, S_5, A_5, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

10. ***(K4.6.11)*** Határozzuk meg a G csoportban a $\langle X \rangle$ részcsoportot: $G = \mathbb{Z}^+$, $X = \{28, 34\}$; $G = S_4$, $X = \{(12), (1234)\}$; $G = S_4$, $X = \{(13), (1234)\}$; $G = S_4$, $X = \{(123), (1234)\}$.

11. ***(K4.6.12)*** Mutassuk meg, hogy a D_n diédercsoportot generálják az f és t elemek. Határozzuk meg a D_5 és D_6 diédercsoportokban a $\langle t, f^2 \rangle$ részcsoportot.

12. ***(K4.6.18)*** Legyenek t és s másodrendű elemek a G csoportban és $f = ts$. Igazoljuk, hogy a $H = \langle t, s \rangle$ részcsoport minden eleme fölírható f^i vagy tf^i alakban alkalmas i egészre. Mutassuk meg, hogy ha f rendje $n < \infty$, akkor $n \ge 3$ esetén H izomorf a D_n diédercsoporttal, $n = 2$ esetén a Klein-csoporttal, $n = 1$ esetén pedig a másodrendű ciklikus csoporttal.

13. ***(K4.3.28)*** Az $\mathbb{R}^\times$, az $\mathbb{R}^+$ és a $\mathbb{C}^\times$ csoportok között van-e izomorf?

14. ***(K4.5.25)*** Osztályozzuk az alábbi csoportokat aszerint, hogy melyek izomorfak közülük: $\mathbb{Z}_2^+$, $\mathbb{Z}_3^+$, $\mathbb{Z}_4^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_3^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathbb{Z}_6^\times$, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q (a kvaterniócsoport), $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

15. ***(K4.5.26)*** Mik az alábbi $G \leq S_X$ csoportokban a pályák és a stabilizátorok?

(1) X a sík pontjai, G az origót fixáló egybevágóságok csoportja.
(2) X a sík pontjai, G az y-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja.
(3) X egy szabályos n-szög csúcsai, G a D_n diédercsoportban egy csúcs stabilizátora.
(4) X egy kocka csúcsai, G a kocka szimmetriacsoportjában egy csúcs stabilizátora.
(5) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = A_4$.

16. ***(K4.5.7)*** Tekintsük a D_4 diédercsoportot, mint a sík egybevágósági transzformációinak részcsoportját. Adjuk meg a sík pontjainak pályáját és stabilizátorát.

17. ***(K4.5.11, K4.5.28)*** Hány szimmetria van? Mivel izomorf a szimmetriacsoport?

(1) Egy olyan téglatest, aminek mindhárom élhosszúsága különböző.
(2) Egy olyan négyzet alapú egyenes hasáb, ami nem kocka.
(3) Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb.
(4) Egy szabályos háromszög alapú egyenes gúla, amely nem szabályos tetraéder.
(5) Egy szabályos tetraéder.
(6) Egy szabályos oktaéder.

18. ***(K4.5.33)*** Egy gráf szimmetriáján a csúcsainak egy olyan permutációját értjük, amely élt élbe visz. Rajzoljunk olyan gráfokat, melyeknek pontosan 2, 4, 3, 1 szimmetriája van.

19. ***(K4.5.29*)*** Igazoljuk, hogy a kocka G szimmetriacsoportja tranzitív az élek halmazán, és minden él stabilizátora négyelemű, továbbá hogy G a lapok halmazán is tranzitív, és itt mindegyik stabilizátor a D_4 diédercsoporttal izomorf. Van-e G-nek 16 elemű részcsoportja?

20. ***(K4.5.31)*** Bontsunk egy négyzetet 9 egybevágó kisebb négyzetre. Hányféleképpen lehet ezek közül négyet kiszínezni (egy színnel) úgy, hogy a négyzet szimmetriáival egymásba átvihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

21. Egy szabályos háromszöget az oldalak harmadolópontjaival 9 szabályos háromszögre bontunk. Hányféleképpen lehet hármat kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), ha a forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető megoldásokat nem tekintjük különbözőnek?

22. Hány páronként nem izomorf 3 pontú gráf van?

23. ***(K4.8.7, 4.8.9)*** Hasson a G csoport önmagán konjugálással: $g * x = gxg^{-1}$. Igazoljuk, hogy a pályák G konjugáltosztályai, és így minden konjugáltosztály elemszáma osztója G rendjének. Mutassuk meg, hogy $x \in G$ stabilizátora az x-szel felcserélhető elemek halmaza.

24. ***(K4.6.14, K4.5.38)*** Legyenek A és B részcsoportok a G csoportban.

(1) Igazoljuk, hogy az AB komplexusszorzat pontosan akkor részcsoport, ha $AB = BA$, és ilyenkor $AB = \langle A \cup B \rangle$.
(2) Legyen X a B szerinti bal oldali mellékosztályok halmaza, és hasson ezen A balszorzással: $a * (gB) = agB$. Határozzuk meg a B pályáját és stabilizátorát, és igazoljuk, hogy $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$. Melyik lineáris algebrai tételre emlékeztet ez?

25. ***(K4.5.35)*** Igazoljuk, hogy A_n-ben minden pont stabilizátora A_{n-1}-gyel izomorf ($n \geq 3$).

26. ***(K4.4.30)*** Legyen H részcsoportja a G csoportnak és $g \in G$. Igazoljuk, hogy a gHg^{-1} komplexusszorzat is részcsoport (ez a H-nak a g-vel vett konjugáltja), mely H-val izomorf.

27. ***(K4.5.39)*** Keressük meg S_4-nek azt a részcsoportját, amit a Cayley-tétel bizonyítása a Klein-csoporthoz rendel. Tegyük meg ugyanezt a D_3 csoporttal is S_6-ban.