Mat. BSc. **Lineáris és absztrakt algebra vizsgadolgozat, III. rész** *2023. június 15.*

NÉV: ______________________ NEPTUN AZONOSÍTÓ: ____________

III. rész (30 perc). *Az alábbi két tétel közül egyet (és csak egyet) kell kiválasztani. A teljes bizonyítás leírása összesen* 6 *pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja.*

31. Cayley tétele.

Cayley tétele: Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal. (1 pont)
Bizonyítás. Legyen G egy csoport. Belátjuk, hogy G izomorf egy olyan permutációcsoporttal, amelyik G elemeit permutálja. Legyen a $g \in G$ csoportelemhez tartozó permutáció $\pi_g : x \mapsto gx$ ($x \in G$) (1 pont). Ez valóban permutációja G elemeinek, mert minden $y \in G$ elemhez pontosan egy olyan $x \in G$ létezik, amellyel $gx = y$, nevezetesen $x = g^{-1}y$ (1 pont). Ez a hozzárendelés műveletettartó (azaz homorfizmus), hiszen $\pi_h(\pi_g(x)) = h(gx) = (hg)x = \pi_{hg}(x)$ (1 pont). A hozzárendelés injektív, mert ha $h \neq g$, akkor $\pi_h(e) = he = h \neq g = ge = \pi_g(e)$, tehát $\pi_h \neq \pi_g$ (1 pont). Ezzel beláttuk, hogy G izomorf a $\{\pi_g \mid g \in G\}$ permutációcsoporttal. (1 pont)

32. Lagrange tétele.

Lagrange tétele: Ha H részcsoportja a G véges csoportnak, akkor $|H|$ osztója $|G|$-nek. (1 pont)
Bizonyítás. Bontsuk föl G-t H szerinti baloldali mellékosztályokra (1 pont). A különböző mellékosztályok diszjunktak (2 pont). [Ezt indoklás nélkül is fel lehet itt használni.] Az egyszerűsítési szabály következtében minden mellékosztály ugyanannyi elemből áll, mint maga a H részcsoport (1 pont). Következésképpen $|G| = |G : H| \cdot |H|$, ahol $|G : H|$ a H részcsoport indexe, azaz a különböző mellékosztályok száma (1 pont).

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarészből nincs 7 pontja, vagy a második vizsgarészből nincs 8 pontja, vagy akinek a három rész S összpontszáma kisebb, mint 17. *A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$17 \leq S < 21$	2
$21 \leq S < 24$	3
$24 \leq S < 27$	4
$27 \leq S \leq 36$	5