NÉV: ________________________ NEPTUN AZONOSÍTÓ: __________

III. rész (30 perc). *Az alábbi két tétel közül egyet (és csak egyet) kell kiválasztani. A teljes bizonyítás leírása összesen* 6 *pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja.*

31. Egy A lineáris transzformáció különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás. Legyenek a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok az A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok, azaz $A(v_i) = \lambda_i v_i$, $v_i \neq 0$ és a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ különböző skalárok. A tételt n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor az egyetlen v_1 vektorból álló vektorrendszer valóban lineárisan független, mivel $v_1 \neq 0$. Tegyük most fel, hogy $n \geq 2$ és $(n-1)$-re igaz az állítás. Azt kell belátnunk, hogy $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ csak úgy lehet, ha mindegyik α_i együttható 0. Mindkét oldal A-nál vett képét tekintve $0 = A(0) = A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 A(v_1) + \cdots + \alpha_n A(v_n) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n - \lambda_n(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1}$. Az indukciós feltevés szerint itt minden együttható 0. Mivel $\lambda_i \neq \lambda_n$, ha $i = 1, \ldots, n-1$, ezért $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Végül az marad, hogy $\alpha_n v_n = 0$, tehát $\alpha_n = 0$ is teljesül.

32. Egy A lineáris transzformáció minden sajátértéke gyöke a minimálpolinomjának.

Bizonyítás. Legyen λ az A-nak egy sajátértéke, azaz valamely $v \neq 0$ vektorra $A(v) = \lambda v$. Jelölje $m(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ az A minimálpolinomját. Ekkor $m(A) = A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0$ (ahol I az identikus leképezés, 0 a mindent a nullvektorba képező transzormáció). Teljes indukcióval könnyen látható, hogy $A^j(v) = \lambda^j v$, így $0 = 0(v) = (A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I)(v) = A^k(v) + c_{k-1}A^{k-1}(v) + \cdots + c_1 A(v) + c_0 I(v) = \lambda^k v + c_{k-1}\lambda^{k-1} v + \cdots + c_1 \lambda v + c_0 v = m(\lambda) v$. Mivel $v \neq 0$, ezért $m(\lambda) = 0$ valóban teljesül.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarészből nincs 7 pontja, vagy a második vizsgarészből nincs 8 pontja, vagy akinek a három rész S összpontszáma kisebb, mint 17. *A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$17 \leq S < 21$	2
$21 \leq S < 24$	3
$24 \leq S < 27$	4
$27 \leq S \leq 36$	5