Mat. BSc. **Lineáris és absztrakt algebra vizsgadolgozat, III. rész** *2023. június 29.*

NÉV: ______________________________ NEPTUN AZONOSÍTÓ: ____________

III. rész (30 perc). *Az alábbi két tétel közül egyet (és csak egyet) kell kiválasztani. A teljes bizonyítás leírása összesen* 6 *pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja.*

31. Két altér összegének dimenziója.

Tétel. Legyen $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ két altér egy véges dimenziós vektortérben. Ekkor $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$. (1 pont)

Bizonyítás. Vegyük $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ egy $w_1, \ldots, w_k$ bázisát ($k = \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$) (1 pont). Egészítsük ezt ki egyrészt $\mathcal{U}$ egy $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_\ell$ bázisává ($k + \ell = \dim(\mathcal{U})$), másrészt $\mathcal{V}$ egy $w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_m$ bázisává ($k+m = \dim(\mathcal{V})$). (1 pont). Belátjuk, hogy $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_\ell$, $v_1, \ldots, v_m$ bázist alkot az $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ altérben. Valóban generátorrendszere, hiszen bármely $u+v \in \mathcal{U}+\mathcal{V}$ vektor előáll $(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_\ell u_\ell) + (\alpha'_1 w_1 + \cdots + \alpha'_k w_k + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m) = (\alpha_1 + \alpha'_1) w_1 + \cdots + (\alpha_k + \alpha'_k) w_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_\ell u_\ell + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m$ alakban. (1 pont) Nézzük a lineáris függetlenséget! Ha $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_\ell u_\ell + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m = 0$, akkor $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_\ell u_\ell = -\gamma_1 v_1 - \cdots - \gamma_m v_m \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, tehát felírható $w_1, \ldots, w_k$ lineáris kombinációjaként is. De mivel $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_\ell, v_1, \ldots, v_m$ független vektorrendszer, ezért az előállítás egyértelmű, tehát $\beta_1 = \cdots = \beta_\ell = 0$. (1 pont). Innen azt kapjuk, hogy $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m = 0$, ami ezen vektorok függetlensége miatt arra vezet, hogy az itteni együtthatók is mind nullák. (1 pont) És persze $k + \ell + m = (k + \ell) + (k + m) - k$. (Ezért már nincs pont.)

32. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ lineáris leképezés magterének és képterének dimenziója közötti összefüggés.

Tétel. Ha $\mathcal{U}$ véges dimenziós, akkor $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}\, A) = \dim(\mathcal{U})$. (1 pont)

Bizonyítás. Vegyük $\ker A$ egy $w_1, \ldots, w_k$ bázisát ($k = \dim(\ker A)$). (1 pont) Egészítsük ki $\mathcal{U}$ egy $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_m$ bázisává ($k + m = \dim(\mathcal{U})$). (1 pont) Belátjuk, hogy $A(u_1), \ldots, A(u_m)$ bázis az $\mathrm{Im}\, A$ képtérben. Generátorrendszere a képtérnek, hiszen ha $u \in \mathcal{U}$, akkor felírható $u = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m$ alakban és így minden képtérbeli vektor, $A(u) = A(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m) = \alpha_1 A(w_1) + \cdots + \alpha_k A(w_k) + \beta_1 A(u_1) + \cdots + \beta_m A(u_m) = \beta_1 A(u_1) + \cdots + \beta_m A(u_m)$. (1 pont) Nézzük a lineáris függetlenséget! Ha $\beta_1 A(u_1) + \cdots + \beta_m A(u_m) = 0$, akkor $A(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m) = 0$, tehát $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m \in \ker A$. Ennélfogva felírható $\ker A$ bázisvektorainak lineáris kombinációjaként, vagyis alkalmas együtthatókkal $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k$. Mivel az itt szereplő vektorok $\mathcal{U}$ bázisát alkotják, ezért a felírás egyértelmű, a baloldalon a w_i-k, a jobboldalon az u_j-k együtthatója nulla, ezért $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ és $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. (2 pont). Tehát $\dim(\mathrm{Im}\, A) = m$, s így $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}\, A) = k + m = \dim(\mathcal{U})$. (Ezért már nincs pont.)

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarészből nincs 7 pontja, vagy a második vizsgarészből nincs 8 pontja, vagy akinek a három rész S összpontszáma kisebb, mint 17. *A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$17 \leq S < 21$	2
$21 \leq S < 24$	3
$24 \leq S < 27$	4
$27 \leq S \leq 36$	5