NÉV: ______________________________ NEPTUN AZONOSÍTÓ: ____________

**II. rész (60 perc).** *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. [A szögletes zárójelbe tett megjegyzések csak magyarázatul szolgálnak, azokat nem volt szükséges leírni.] Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben az összeadást úgy, hogy bármely két vektor összege az origó, azaz $(0,0)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

> $0+v=v$, pl. $v=(1,0)$. [Más $n$ nullelem sincs, mert minden $v$-re $0=n+v=v$ teljesülne.]

12. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „A $\mathbb{C}$ fölötti $\mathbb{C}^{2\times 2}$ vektortér valós determinánsú mátrixai alteret alkotnak."

> Pl. az egységmátrix közöttük van, de az $1+i$-szerese nincs.

13. Adjuk meg az $u, v, w$ vektorokat úgy, hogy $\{u, v\}$ és $\{v, w\}$ független legyen, de $\{u, v+w\}$ ne legyen az.

> Pl. $u=(1,0)$ $v=(0,1)$ $w=(1,-1)$

14. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixhoz $M - M^\top$-t rendeli?

> 3

15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V,W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ minden $\lambda, \mu \in T$ testelem és $A$ lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, D, O, V betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) $A$ összegtartó.
(L) $A$ skalárszorostartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(V) Vektortéraxióma.

(*Pontozás:* 4 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big((\lambda+\mu)A\big)(v) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$(\lambda+\mu)\big(A(v)\big) = \quad \boxed{\text{V}}$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \mu\big(A(v)\big) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$(\lambda A)(v) + (\mu A)(v) = \quad \boxed{\text{O}}$$
$$(\lambda A + \mu A)(v)$$

17. Legyen $V$ az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nullapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \to \mathbb{C}$, melyre $A(p) = p(1+i)$. Mi $A$ mátrixa a szokásos bázispárban?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[bázisok: $1, x, x^2$, ill. $1, i$]

18. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix sajátértékei $\pm i$. Mi lehet $M^2$?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

19. Egy 6-dimenziós valós vektortér $A$ lineáris transzformációjának minimálpolinomja $x^4 - x^2$. Mi lesz $A^2$ minimálpolinomja?

$x^2 - x$

20. Legyenek $u$ és $v$ merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u - iv, u + 2iv\rangle$?

$-1$

21. Egy önadjungált mátrix karakterisztikus polinomja $x^k - 1$. Mik $k$ lehetséges értékei?

$k = 1$ vagy 2.

22. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ben az $(i, i, i)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

Pl. $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$.

23. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a főátlóban van nulla, akkor a kvadratikus alak szemidefinit.”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

24. Legyenek $a$ és $b$ egy csoport elemei, $a$ rendje 3, $b$ rendje 5. Mi egy elégséges feltétele annak, hogy $ab$ rendje 15 legyen?

$ab = ba$

25. Hány részcsoportja van a 12-elemű ciklikus csoportnak?

6 [12 osztóinak száma]

26. Hány másodrendű elem van a szabályos 8-szög szimmetriacsoportjában?

9

27. Mely $d$ valós szám esetén alkotnak normálosztót a $d$ determinánsú mátrixok a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ általános lineáris csoportban?

$d = 1$

28. Számítsa ki a $(4 + 2j)(1 + i)^{-1}$ kvaterniót.

$2 - 2i + j + k$

29. Mi $\mathbb{Q}[x]$-nek az a legszűkebb ideálja, amelyik az $x^4 - 1$ és az $x^6 - 1$ polinomokat egyaránt tartalmazza?

Az $(x^2 - 1)$ főideál.

30. Hány olyan algebrai szám van, amelynek a minimálpolinomja $x^2 - 3x + 1$?

2

[Ennek az irreducibilis polinomnak a két gyöke.]