NÉV: ____________________ NEPTUN AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Az összeadás változatlanul hagyása mellett módosítsuk $\mathbb{R}^2$ vektorainak skalárral való szorzását így: legyen $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha^2 y)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$, pl. nem teljesül, ha $\alpha = \beta = 1$, $v = (0, 1)$

12. Vegyük $\mathbb{R}^2$ három részhalmazát: $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$, $C = \{(x, y) \mid x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$. Ezek közül melyik altér, illetve melyek alterek $\mathbb{R}^2$-ben?

A és C

13. Legyenek v_1, v_2, v_3 lineárisan független vektorok $\mathbb{R}^3$-ben. Mely $t \in \mathbb{R}$ érték esetén lesznek a $v_1 + tv_2$, $v_2 + tv_3$, $v_3 + tv_1$ vektorok lineárisan összefüggők?

$t = -1$ esetén.

14. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixhoz az $M^\top - M$ mátrixot rendeli?

1

15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy két $A, B \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ lineáris transzformáció szorzata is összegtartó, azaz $AB(u+v) = AB(u) + AB(v)$ tetszőleges $u, v \in \mathcal{V}$ vektorok esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, B, C, O, S betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(A) A összegtartó.
(B) B összegtartó.
(C) Asszociativitás.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(S) Leképezések szorzatának definíciója.

(*Pontozás:* 4 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$(AB)(u + v) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$A(B(u + v)) = \quad \boxed{\text{B}}$$
$$A(B(u) + B(v)) = \quad \boxed{\text{A}}$$
$$A(B(u)) + A(B(v)) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$(AB)(u) + (AB)(v)$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nullapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \to \mathbb{C}$, melyre $A(p) = p(1 - i)$. Mi A mátrixa a szokásos bázispárban?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

[bázisok: $1, x, x^2$, ill. $1, i$]

18. Az $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrix minimálpolinomja $x^2 - 2x + 1$. Mi lehet M Jordan-féle normálalakja (hasonlóság erejéig)?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

19. Egy 4-dimenziós valós vektortér A lineáris transzformációjának minimálpolinomja $x^3 - 1$. Mi lehet A karakterisztikus polinomja?

$(x^3-1)(x-1) = x^4-x^3-x+1$

20. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u + iv, iu + v\rangle$?

0

21. Mennyi egy ortogonális mátrix négyzetének a determinánsa?

1

22. Adja meg $\mathbb{C}^3$-ben az $(i, 1, 1)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

Pl. $(1, i, 0)$, $(0, 1, -1)$.

23. Adjon ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixának minden eleme pozitív szám, akkor a kvadratikus alak pozitív definit.”

Pl. $x^2+2xy+y^2$, azaz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

24. Legyenek a és b egy csoport elemei. Mi annak a feltétele, hogy $(ab)^2 = a^2b^2$ teljesüljön?

$ab = ba$

25. Hány részcsoportja van a 100-elemű ciklikus csoportnak?

9

26. Hány ötödrendű elem van az S_5 szimmetrikus csoportban?

24

27. A négyzet D_4 szimmetriacsoportját generálja az f 90°-os forgatás és egy t tengelyes tükrözés. Adjon meg egy 4-elemű normálosztót D_4-ben, ami tartalmazza t-t.

$\{e, t, f^2t, f^2\}$

28. Számítsa ki a $(10 + 5j)(1 + 2i)^{-1}$ kvaterniót.

$2 - 4i + j + 2k$

29. Mi $\mathbb{Q}[x]$-nek az a legszűkebb ideálja, amelyik az $x^2 - 3x + 2$ és az $x^2 - 4$ polinomokat egyaránt tartalmazza?

Az $(x - 2)$ főideál.

30. Mutasson két olyan transzcendens számot, melyeknek a szorzata algebrai szám.

Pl. $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$.