Mat. BSc. **Lineáris és absztrakt algebra vizsgadolgozat, II. rész** *2023. június 29.*

NÉV: ______________________________ NEPTUN AZONOSÍTÓ: ______________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Az összeadás változatlanul hagyása mellett módosítsuk $\mathbb{R}^2$ vektorainak skalárral való szorzását így: legyen $\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

> $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$, pl. nem teljesül, ha $\alpha = \beta = 1$, $v = (1, 0)$

12. Mely d számokra igaz, hogy a d determinánsú valós mátrixok alteret alkotnak a 2×2-es valós mátrixok vektorterében?

> Nincs ilyen d.

13. Legyenek u, v, w lineárisan független vektorok. Mely t értékek esetén lesznek az $u+2v+3w, u+tv, u+tw$ vektorok lineárisan összefüggők?

> $t = 0$ és $t = 5$ esetén.

14. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixhoz $M + M^\top$-t rendeli?

> 3

15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy két $A, B \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ lineáris leképezés összege is skalárszorzat-tartó, azaz $(A + B)(\alpha u) = \alpha(A + B)(u)$ minden $\alpha \in T$ testelem és $u \in \mathcal{U}$ vektor esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, D, O, V betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A és B összegtartó.
(L) A és B skalárszorostartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(V) Vektortéraxióma.

Pontozás:		
	4 helyes válasz:	2 pont;
	2 v. 3 helyes válasz:	1 pont;
	egyébként:	0 pont.

$$
\begin{aligned}
(A+B)(\alpha u) &= \quad \boxed{\text{O}} \\
A(\alpha u) + B(\alpha u) &= \quad \boxed{\text{L}} \\
\alpha A(u) + \alpha B(u) &= \quad \boxed{\text{V}} \\
\alpha(A(u) + B(u)) &= \quad \boxed{\text{O}} \\
\alpha((A+B)(u))&
\end{aligned}
$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nullapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \to V$, melyre $A(p) = 2p + p'$ (p' a polinom deriváltját jelöli). Írja föl A mátrixát a szokásos bázisban.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

18. Az $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrix karakterisztikus polinomja $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Mi lehet M Jordan-féle normálalakja (hasonlóság erejéig)?

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

19. Egy valós vektortér A lineáris transzformációjának karakterisztikus polinomja $x^4 - x^2$. Mi lehet A minimálpolinomja?

$x^4 - x^2$ vagy $x^3 - x$

20. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u + iv, 2u + v\rangle$?

$2 - i$

21. Egy ortogonális mátrix karakterisztikus polinomja $x^2 - cx + 1$. Mik c lehetséges értékei?

$-2 \leq c \leq 2.$

22. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ben az $(1, i, 1 + i)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

Pl. $(1, -i, 0)$, $(2, 0, -1-i)$.

23. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a főátlóban csak pozitív számok állnak, akkor a kvadratikus alak pozitív definit.”

Pl. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

24. Legyenek a és b egy csoport elemei. Mi annak a feltétele, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ teljesüljön?

$ab = ba$

25. Hány részcsoportja van a 6-elemű diédercsoportnak?

6

26. Hány harmadrendű elem van az S_5 szimmetrikus csoportban?

20

27. Indokolja meg egy példa segítségével, hogy a $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ általános lineáris csoportban a csoporthoz tartozó diagonális mátrixok nem alkotnak normálosztót.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

28. Számítsa ki a $(1 + i)^{-1}(4 + 2j)$ kvaterniót.

$2 - 2i + j - k$

29. Mi $\mathbb{C}[x]$-nek az a legszűkebb ideálja, amelyik az $x^2 + 1$ és az $x^3 - i$ polinomokat egyaránt tartalmazza?

Az $(x + i)$ főideál.

30. Mutasson két olyan transzcendens számot, melyeknek az összege algebrai szám.

Pl. $(-\pi) + \pi = 0.$