*Mat. BSc.* **Lineáris és absztrakt algebra vizsgadolgozat, I. rész** *2023. június 15.*

NÉV: ______________________ NEPTUN AZONOSÍTÓ: ____________

**I. rész (30 perc).** *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjon fel olyan vektortér-axiómát, amiben kétféle összeadás szerepel.

$\forall \alpha, \beta \in T, \forall v \in \mathcal{V} : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

2. Mik a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok által generált altér elemei?

$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T\}$

3. Mi annak a feltétele, hogy két altér összege, $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ direkt összeg legyen?

$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{0\}$

4. Írja fel az $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ lineáris leképezés magterének és képterének dimenziója közötti összefüggést.

$\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathcal{U}$

5. Definiálja az invariáns altér fogalmát.

Az $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ lineáris transzformáció invariáns altere, ha $\forall u \in \mathcal{U} : A(u) \in \mathcal{U}$.

6. Mit nevezünk ortogonális transzformációnak?

Egy valós euklideszi tér $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ lineáris transzformációja ortogonális, ha $\forall u, v \in \mathcal{V} : \langle A(u), A(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

7. Mondja ki a normális lineáris transzformációk diagonalizálhatóságáról szóló tételt.

Egy lineáris transzformációhoz pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis, amelyben a mátrixa diagonális, ha normális transzformáció.

8. Mondja ki a pályák (orbitok) számának kiszámítására vonatkozó tételt.

Egy permutációcsoport pályáinak száma megegyezik a csoportelemek fixpontjai számának átlagával.

9. Legyen $I$ az $R$ gyűrű ideálja. Mik az $R/I$ faktorgyűrű elemei?

Az $r + I$ mellékosztályok ($r \in R$).

10. Definiálja a transzcendens szám fogalmát.

Egy $c$ komplex számot transzcendensnek nevezünk, ha nincs olyan nem-nulla, racionális együtthatós polinom, aminek gyöke.