

NÉV: _____ NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.

1. Mikor mondjuk, hogy a v_1, v_2, \dots, v_n vektorok lineárisan függetlenek?

Ha az $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ lineáris kombináció csak úgy lehet a nullvektor, ha mindegyik $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ együttható nulla.

2. Hogyan számítható ki két altér összegének dimenziója?

$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$, ahol \mathcal{U} és \mathcal{V} egy véges dimenziós vektortér alterei.

3. Definiálja egy lineáris transzformáció minimálpolinomját.

A $p(x) \in T[x]$ polinom az $A \in \text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ lineáris transzformáció minimálpolinomja, ha $p(A) = 0$ és $p(x)$ a legkisebb fokú polinom, amire ez teljesül, továbbá $p(x)$ főegyütthatója 1.

4. Bilineáris függvény mátrixa hogyan változik a bázis megváltoztatása esetén?

Ha a bilineáris függvény mátrixa egy adott bázisban B , valamint S a másik bázisra áttérés mátrixa, akkor az új bázisban a bilineáris függvény mátrixa $S^T B S$ lesz.

5. Mit nevezünk normális transzformációnak?

Egy komplex euklidészi tér $A \in \text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ lineáris transzformációja normális, ha $A^* A = A A^*$.

6. Milyen komplex számok lehetnek egy unitér mátrix sajátértékei?

Amelyeknek az abszolút értéke 1.

7. Legyen $\varphi : G \rightarrow H$ egy csoportok közötti leképezés. Mikor mondjuk, hogy φ izomorfizmus?

Ha $\forall x, y \in G : \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ és φ bijektív leképezés.

8. A konjugálás segítségével adja meg annak feltételét, hogy egy G csoport H részcsoportja egy alkalmas homomorfizmus magja legyen.

Akkor és csak akkor lehet H egy homomorfizmus magja, ha $\forall g \in G, \forall h \in H : g^{-1}hg \in H$.

9. Mondja ki a pályák (orbitok) számának kiszámítására vonatkozó tételt.

Egy permutációcsoport pályáinak száma megegyezik a csoportelemek fixpontjai számának átlagával.

10. Mely elemek alkotják az R egységelemes kommutatív gyűrű egy r eleme által generált főideált?

$(r) = \{xr \mid x \in R\}$.