Mat. BSc. **Lineáris és absztrakt algebra vizsgadolgozat, I. rész** *2023. június 29.*

NÉV: ____________________ NEPTUN AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Mikor mondjuk, hogy a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok lineárisan összefüggők?

> Ha vannak olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ skalárok, amelyek között van 0-tól különböző, amelyekkel $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$.

2. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ lineáris transzformáció magterének segítségével adja meg annak feltételét, hogy A invertálható legyen.

> $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

3. Definiálja a sajátérték fogalmát.

> A $\lambda \in T$ testelem az $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ lineáris transzformáció sajátértéke, ha $\exists v \in \mathcal{V}$: $v \neq 0, A(v) = \lambda v$.

4. Mit állít a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség?

> Euklideszi tér bármely u, v vektorpárjára $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

5. Mit nevezünk unitér transzformációnak?

> Egy komplex euklideszi tér $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ lineáris transzformációja unitér, ha $\forall u, v \in \mathcal{V} : \langle A(u), A(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.

6. Mi annak a feltétele, hogy egy véges dimenziós vektortér lineáris transzformációjához legyen olyan bázis, amelyben a transzformáció mátrixa diagonális?

Egy T test fölötti véges dimenziós vektortér lineáris transzformációjához pontosan akkor létezik olyan bázis, amelyben a mátrixa diagonális, ha a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik $T[x]$-ben.

7. Mondja ki a részcsoportok elemszámára vonatkozó Lagrange-tételt.

Egy véges csoport bármely részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (másnéven rendjének).

8. Mondja ki a csoportok közötti homorfizmusokra vonatkozó homomorfizmus-tételt.

Legyen $\varphi : G \to H$ homomorfizmus. Ekkor $G/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.

9. Mit nevezünk egy gyűrű ideáljának?

Az R gyűrű egy I részhalmaza ideál, ha az összeadásra nézve részcsoport (azaz nem üres, $\forall x, y \in I : x + y, -x \in I$) és $\forall r \in R\ \forall x \in I : rx, xr \in I$.

10. Definiálja az algebrai szám fogalmát.

Egy c komplex számot algebrainak nevezünk, ha van olyan nem-nulla, racionális együtthatós polinom, aminek gyöke.