LINEÁRIS ÉS ABSZTRAKT ALGEBRA — normál szintű előadás

TÁJÉKOZTATÓ A VIZSGÁKRÓL

Az írásbeli vizsgák időpontjai: június 1, 15, 29 és július 13. Minden alkalommal csütörtöki napon 10:00-tól 12:00-ig a Lóczy Lajos teremben (0.804), ahol a keddi előadások is voltak. A vizsgák előtti online konzultációkról és a dolgozatjavítás utáni betekintésekről a Neptunban lesz információ. Az előadások óravázlata, a vizsgán szereplő bizonyítások választéka, valamint korábbi félévek vizsgadolgozatai Kiss Emil professzor úr honlapján (https://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas/faliujsag/) találhatók.

Eredményes felkészülést!

ÓRAVÁZLATOK

2022/23. II. félév

2023.02.28.

Ismétlés: testek (definíció, példák). Vektortér (axiómák, példák: T^n, $T^{k\times n}$, $T[x]$, függvények, sorozatok, hatványhalmaz $\mathbb{F}_2$ fölött). Az axiómák egyszerű következményei (soktagú asszociativitás és kommutativitás, $v+v=v \Rightarrow v=\underline{0}$, nullvektor és ellentett egyértelműsége, $\lambda v=\underline{0} \iff (\lambda=0$ vagy $v=\underline{0})$, $-v=(-1)v$). Lineáris kombináció. Lineárisan független vektorrendszer. Linárisan összefüggő vektorrendszer. Amelyik vektornak az együtthatója nem 0, az kifejezhető a többbi lineáris kombinációjaként.

2023.03.02.

Altér. Alterek metszete altér. (Véges sok vektor által) generált altér, elemei a lineáris kombinációk. Generátorrendszer. Ha függetlent kiegészítve összefüggőt kapunk, akkor az új vektor kifejezhető lineáris kombinációként. Ha egy vektorrendszer lineárisan független, de nem generátorrendszer, akkor kiegészíthető egy adott generátorrendszer alkalmas tagjával, hogy független legyen. Kicserélési tétel. Következmény: független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma. Bázis. Minden bázis azonos elemszámú. Dimenzió.

2023.03.07.

Független vektorrendszer kiegészíthető bázissá. Generátorrendszerből kiválasztható bázis. Dimenziónyi független vektor, ill. generátorrendszer bázis. Altér dimenziója. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Két altér összegének dimenziója. Direkt összeg (két- és többtagú). Kiegészítő altér. Lineáris leképezés, lineáris transzformáció, példák. Képtér, magtér.

2023.03.09.

Két vektor képe azonos $\iff$ különbségük a magtérben van. $\dim \mathrm{Ker} A + \dim \mathrm{Im} A = \dim \mathcal{V}$. Bázis képe előírható. $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ vektortér, ennek dimenziója.

2023.03.14.

Lineáris leképezések szorzása, műveleti tulajdonságok, kommutativitás nem teljesül. Identitás $I_{\mathcal{U}}$. $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ bal-/jobbinverze. Ha mindkettő van, akkor megegyeznek, jelölése A^{-1}. Van balinverz $\iff$ $\mathrm{Ker} A=\{0\}$, azaz A injektív; egyértelmű, ha $\mathrm{Im} A=\mathcal{V}$ is, azaz A bijektív. Van jobbinverz $\iff$ $\mathrm{Im} A=\mathcal{V}$, azaz A szürjektív; egyértelmű, ha $\mathrm{Ker} A=\{0\}$ is, azaz A bijektív. Izomorfizmus. Izomorf vektorterek. Bal-/jobboldali nullosztó, feltétele ($\mathrm{Ker} A \neq \{0\}$, ill. $\mathrm{Im} A \neq \mathcal{V}$).

2023.03.16.

Vektor koordinátái adott bázisban, jelölése [v] (oszlopvektor). Lineáris leképezés mátrixa. $[A(v)] = [A][v]$, összeg, skalárszoros mátrixa. Szorzat mátrixa. Áttérési mátrix (egyik bázisról másikra). Leképezés mátrixa új bázisokban $S^{-1}[A]R$.

2023.03.21.

Választhatók olyan bázisok, hogy a mátrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ alakú. Vetítés (projekció). Sajátvektor, sajátérték, sajátaltér. Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek. Karakterisztikus polinom $\det(xI - A)$. Nem függ a bázis választásától. Mátrix nyoma $(tr(A))$. A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei.

2023.03.23.

Egy alkalmazás: Fibonacci-sorozat. Lineáris transzformáció, illetve mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom. Egy polinomba behelyettesítve 0-t kapunk $\iff$ a polinom osztható a minimálpolinommal. Cayley–Hamilton-tétel (csak kimondva, bizonyítás nélkül).

2023.03.28.

1. zárthelyi dolgozat.

2023.03.30.

Minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak. A minimálpolinom bővebb test felett nem változik. Diagonális mátrix minimálpolinomja. Invariáns altér. Ha $AB = BA$, akkor $\mathrm{Ker}(B)$ és $\mathrm{Im}(B)$ A-nak invariáns altere; speciális eset: $B = p(A)$ $(p \in T[x])$. Ha A minimálpolinomja $p(x)q(x)$, ahol a két tényező relatív prím, akkor $V = \mathrm{Ker}(p(A)) \oplus \mathrm{Ker}(q(A))$ A-invariáns alterek direkt összege, és A-t az alterekre megszorítva a kapott lineáris transzformációk minimálpolinomja $p(x)$, illetve $q(x)$.

2023.04.04.

Diagonalizálható mátrix, illetve lineáris transzformáció. A diagonalizálhatóság feltétele: a minimálpolinom különböző gyöktényezők szorzatára bomlik $T[x]$-ben. Nilpotens transzformáció. Ha $A^k = 0$ de $A^{k-1} \neq 0$, azaz van olyan v vektor, amelyre $A^{k-1}(v) \neq 0$, akkor v, $A(v)$, $A^2(v)$, …, $A^{k-1}(v)$ lineárisan függetlenek. Komplex számtest fölötti véges dimenziós vektorterek lineáris transzformációinak Jordan-féle normálalakja (bizonyítás nélkül). T test fölötti $\mathcal{V}$ vektortéren értelmezett $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to T$ bilineáris függvények. Bilineáris függvény mátrixa, $B(u,v) = [u]^\top [B][v]$. Áttérés új bázisra, $[B]_{\mathcal{B}'} = S^\top [B]_{\mathcal{B}} S$. Szimmetrikus bilineáris függvények. Kvadratikus alakok, bilineáris függvény által meghatározott $Q(v) = B(v,v)$ kvadratikus alak. Ha T karakterisztikája nem 2 (azaz $1+1 \neq 0$ T-ben), és B szimmetrikus, akkor $B(u,v) = \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v))$. (A továbbiakban feltesszük, hogy char $T \neq 2$.) Minden kvadratikus alakhoz létezik egyetlen szimmetrikus bilineáris függvény, melyből megkapható.

2023.04.06.

Ha B szimmetrikus, akkor alkalmas bázisban $[B]$ diagonális. B-ortogonális bázis, a Gram–Schmidt ortogonalizáció.

2023.04.11.

Valós eset: alkalmas bázisban az átlóban $+1$, 0, -1 állhat. Sylvester tehetetlenségi tétele. Elfajuló, nem-elfajuló; pozitív (negatív) definit, illetve szemidefinit, valamint indefinit kvadratikus alakok (ill. bilineáris függvények, mátrixok). A pozitív definit mátrixok jellemzése a főminorok determinánsával. Valós euklideszi tér, skaláris (belső) szorzat $\langle u, v\rangle$. Ortonormált bázis (ONB). Azonos dimenziós euklideszi terek izomorfak. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ONB, akkor $v = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, v\rangle b_i$. Lineáris transzformáció mátrixának elemei $\langle b_i, A(b_j)\rangle$. Vektorok hossza: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle b_i, v\rangle^2}$. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség.

2023.04.13.

Vektorok szöge. Háromszög-egyenlőtlenség. Merőleges (ortogonális) vektorok. Ortogonális altér: $\mathcal{U}^{\perp}$. Ha $\mathcal{U}$ véges dimenziós, akkor $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$. Lineáris függvények előállítása $v \mapsto \langle u, v\rangle$ alakban. Kapcsolat a véges dimenziós euklideszi tér bilineáris függvényei és lineáris transzformációi között: $B(u, v) = \langle u, A(v)\rangle$. Adjungált leképezés: $\langle A^*(u), v\rangle = \langle u, A(v)\rangle$.

2023.04.18.

Az adjungálás tulajdonságai: $(A + B)^* = A^* + B^*, (\lambda A)^* = \lambda A^*, (AB)^* = B^* A^*, I^* = I, (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, (A^*)^* = A$. Ortogonális transzformáció: $\langle A(u), A(v)\rangle = \langle u, v\rangle \iff A^* = A^{-1}$. Mátrixa ONB-ben ortogonális mátrix, azaz $[A]^{\top} = [A]^{-1}$. ONB-ről ONB-re áttérés mátrixa ortogonális. Az ortogonális transzformációk csoportot alkotnak. Minden ortogonális transzformációhoz található olyan ONB, amelyben a mátrixa blokk-diagonális, 1×1-es ($+1$ vagy -1) és 2×2-es $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ blokkokból áll össze (csak kimondva, bizonyítás nélkül). Euklideszi tér szimmetrikus transzformációja: $A^* = A$. Mátrixa ONB-ben szimmetrikus. Főtengelytétel: Minden szimmetrikus transzformációhoz van olyan ONB, amelyben a mátrixa diagonális.

2023.04.20.

Csoport definíciója. A csoportaxiómák egyszerű következményei: többtényezős szorzat tetszőlegesen zárójelezhető; az egységelem (e) és az inverz egyértelmű; $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$; egyszerűsítési szabály, $ax = b$ és $xa = b$ egyértelműen megoldható. Permutáció, permutációk szorzása, szimmetrikus csoport: $Sym(X)$, ill. S_n. Diédercsoport: D_n ($|D_n| = 2n$).

2023.04.25.

ONLINE ELŐADÁS! Általános lineáris csoport $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$, $\mathrm{GL}(d, T)$. Részcsoport. Példák: $\{A \in \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \mid \mathcal{U}\ A\text{-nak invariáns altere}\}$; ortogonális csoport. Részcsoportok metszete részcsoport. Generált részcsoport. Hatványok, a hatványozás azonosságai. Ciklikus csoportok. Elem rendje, $x^n = x^k \iff n \equiv k \pmod{x\,\text{rendje}}$. Ciklikus csoportok részcsoportjai. Bal- és jobboldali mellékosztályok, példa: D_3-ban különbözők. A csoport felbontása mellékosztályokra, index. Lagrange-tétel. Az elemek rendje osztója a csoport elemszámának, $\forall x \in G : x^{|G|} = e$, Euler–Fermat-tétel.

2023.04.27.

Homomorfizmus csoportok között ($\varphi : G \to H$). Kép, mag, $\varphi(x) = \varphi(y) \iff x\mathrm{Ker}(\varphi) = y\mathrm{Ker}(\varphi)$. Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.

2023.05.02.

Konjugálás ($x \mapsto gxg^{-1}$), N normálosztó $\iff \forall g \in G, \forall x \in N : gxg^{-1} \in N$. Izomorfizmus, izomorf csoportok. Homomorfizmus-tétel. Permutációcsoport. Cayley-tétel. Permutációcsoport pályái (orbitjai), pont stabilizátora, $|G(x)| = |G : G_x|$. A pályák száma = a fixpontok átlagos száma.

2023.05.04.

Ismétlés: gyűrű, test. Speciális gyűrűk: kommutatív, egységelemes, ferdetest. Homomorfizmus gyűrűk között. Kép, mag, ideál, faktorgyűrű. Főideál kommutatív egységelemes gyűrűben. $\mathbb{Z}$-ben és $T[x]$-ben (T test) minden ideál főideál. $\mathbb{Z}/(m)$ test $\iff$ m prímszám. $T[x]/(f(x))$ test $\iff$ $f(x)$ felbonthatatlan.

2023.05.09.

2. zárthelyi dolgozat.

2023.05.11. Eötvös-nap, tanítási szünet.

2023.05.16.

Résztest, testbővítés, testbővítés foka. Számtestek. Algebrai és transzcendens számok, pl. π és e transzcendens számok (bizonyítás nélkül). Algebrai szám minimálpolinomja, foka. Ha $\mathbb{C}$-nek egy egységelemes részgyűrűje $\mathbb{Q}$ fölött véges dimenziós, akkor résztest. A $\mathbb{Q}(a)$ egyszerű algebrai bővítés elemei. Az algebrai számok testet alkotnak. Kvaterniók ferdeteste.

2023.05.18.

Komplex bilineáris (másnéven sesquilineáris) függvények: $B(\lambda u, v) = \overline{\lambda} B(u, v)$. Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a komplex bilineáris függvények és a kvadratikus alakok között. A kvadratikus alak pontosan akkor lesz minden vektorra valós értékű, ha a komplex bilineáris függvény Hermite-féle, azaz $B(v, u) = \overline{B(u, v)}$. A valós szimmetrikus bilineáris függvényekre vonatkozó definíciók (pl. pozitív definit) és tételek (pl. Sylvester tétele) megfelelői Hermite-féle bilineáris függvényekre. Komplex euklideszi tér. Vektor normája. ONB, skaláris szorzat felírása ONB-re vonatkozó koordinátákkal. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, háromszög-egyenlőtlenség.

2023.05.23.

3. zárthelyi dolgozat.

2023.05.25.

Komplex euklideszi tér lineáris transzformációjának adjungáltja, az adjungálás tulajdonságai, az adjungált mátrixa ONB-ban. Normális transzformáció ($AA^* = A^*A$). Pontosan akkor van A sajátvektoraiból álló ONB, ha A normális (bizonyítás nélkül). Önadjungált transzformáció: $A^* = A$. Önadjungált $\iff$ normális amelynek sajátértékei valós számok. Unitér transzformáció: $U^* = U^{-1}$. Ekvivalens tulajdonságok: (1) U unitér; (2) U normális és sajátértékei 1 abszolút értékű komplex számok;(3) $\forall u, v : \langle U(u), U(v) \rangle = \langle u, v \rangle$; (4) $\forall v : \|U(v)\| = \|v\|$; (5) U valamely ONB-t ONB-be képez; (6) U bármely ONB-t ONB-be képez.