Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat

Első zárthelyi (2023. március 28.) — eredmények és pontozás

1. Nincs ilyen c. Az altér generátorainak gyöke 2, ezért minden lineáris kombinációnak is. Így ha $x^2 + cx - 2c$ benne van az altérben, akkor gyöke 2. Tehát $4 + 2c - 2c = 0$, ellentmondás (6 pont). *Második megoldás:* ha $x^2+cx-2c = \alpha(x^2-4)+\beta(3x^2-4x-4)+\gamma(x^2-4x+4)$, akkor $\alpha+3\beta+\gamma = 1$, $-4\beta - 4\gamma = c$ és $-4\alpha - 4\beta + 4\gamma = -2c$ (3 pont). Az első egyenlet négyszeresét a harmadikhoz adva $8(\beta+\gamma) = 4-2c$, amit a második egyenlet kétszereséhez adva $2c+4-2c = 0$ adódik, ellentmondás.

2. A bázistranszformáció képletének alkalmazásához az új bázis elemeit fel kell írni a régi segítségével. Nyilván $(1,1) = 0\cdot(1,0)+1\cdot(1,1)$ és $(0,1) = -1\cdot(1,0)+1\cdot(1,1)$, ezért $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), ennek inverze $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), így a képlet szerint az új mátrix $S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (1 pont). A $(2,3)$ pont képének kiszámításához meg kell határoznunk e pont koordinátáit a régi bázisban (számolhatnánk az új bázisban is). Nyilván $(2,3) = -1\cdot(1,0) + 3\cdot(1,1)$. Ezért a $[C(v)] = [C][v]$ képletet a régi bázisban alkalmazva $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, vagyis az $(2,3)$ pont képe $3\cdot(1,0) - 1\cdot(1,1) = (2,-1)$ (3 pont).

3. A W_1 nem altér, mert például $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ kivezet (2 pont). A W_2 altér, azokból a mátrixokból áll, amelyekre $m_{12} = m_{21} = 0$ (1 pont), dimenziója 2 (1 pont). Bázis például $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2 pont).

4. A B nem lineáris, mert $B(\lambda f) = \lambda^2 B(f) \neq \lambda B(f)$ például abban az esetben, amikor $f(x) = x$ és $\lambda = 2$ (2 pont). Az A lineáris (0 pont), az $\big((1,i,x,ix),(1,i)\big)$ bázispárban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (4 pont).}$$

5. Ha egy valós együtthatós polinomnak az $1-i$ gyöke, akkor gyöke a $\overline{1-i} = 1+i$, és ezért kiemelhető belőle $(x-1-i)(x-1+i) = x^2 - 2x + 2$ (1 pont). Ezért U kétdimenziós, mert bázisa például $x^2-2x+2, x(x^2-2x+2)$ (1 pont). A V altér háromdimenziós, mert bázisa például $x-1, x^2-x, x^3-x^2$ (1 pont). A metszetben azok a polinomok vannak, amelyek $(x-1)(x^2-2x+2)$-vel oszthatók, és így egydimenziós alteret kapunk, melyben bázis maga $(x-1)(x^2-2x+2)$ (1 pont). Ekkor pedig $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W) = 2+3-1 = 4$ (1 pont). Ezért $U+W$ nem lehet valódi altér a 4-dimenziós V-ben (1 pont), bázis például $1, x, x^2, x^3$.

6. A három transzformáció mátrixa a szokásos bázisban $(1/2)\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $(1/2)\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3 pont). Gauss-eliminációval látjuk, hogy ezek függetlenek, ezért a keresett rang 3 (3 pont).