Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat

Első zárthelyi (2023. március 28.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze.

1. Legyen $V = \mathbb{R}[x]$ az $\mathbb{R}$ fölött és $W = \langle x^2 - 4, 3x^2 - 4x - 4, x^2 - 4x + 4 \rangle$ a V altere. Mely $c \in \mathbb{R}$ értékekre tartalmazza W az $x^2 + cx - 2c$ polinomot?

2. Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér. Egy $C \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció mátrixa az $\big((1,0),(1,1)\big)$ bázisban $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mi C mátrixa az $\big((1,1),(0,1)\big)$ bázisban? Hová viszi C a $(2,3)$ pontot? $(3+3$ pont.)

3. Legyen V a $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér, továbbá

a) $W_1 = \{M \in V \,:\, m_{12}m_{21} = 0\}$ és

b) $W_2 = \{M \in V \,:\, m_{12}^2 + m_{21}^2 = 0\}$.

Amelyik nem altér W_1 és W_2 közül, annál igazoljuk ezt (2 pont), amelyik pedig altér (ezt nem kell igazolni), annak adjuk meg a dimenzióját és egy bázisát (4 pont). A dimenzió indoklás nélküli megadása 1 pontot ér.

4. Legyen V a $\mathbb{C}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjaiból és a nullapolinomból álló **valós** fölötti vektortér, $W = \mathbb{C}$, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, továbbá $A, B : V \to W$, ahol

a) $A(f) = f(2) - f(i)$;

b) $B(f) = f(2)f(i)$.

Amelyik nem lineáris leképezés A és B közül, annál igazoljuk ezt (2 pont), amelyik pedig az (ezt nem kell igazolni), annak adjuk meg a mátrixát (4 pont). A bázispár tetszőlegesen választható, de fel kell sorolni az elemeiket (a megfelelő sorrendben).

5. Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló vektortér $\mathbb{R}$ fölött. Álljon az U altér azokból a polinomokból, amelyeknek gyöke az $1-i$, továbbá W azokból, amelyeknek gyöke az 1. Adjunk meg egy bázist $U + W$-ben, és egyet $U \cap W$-ben.

6. Legyen F, illetve T a síkon az origó körüli $+60$ fokos forgatás, illetve az $x = 0$ egyenesre tükrözés. Határozzuk meg az $\{F, F^2, T\}$ vektorrendszer rangját.