

Bsc algebra2 gyakorlat
Második feladatsor (2. prezentáció)

1. Melyik bázis \mathbb{R}^2 -ben? (a) $(1, 1)$ és $(2, 2)$; (b) $(0, 1)$ és $(1, 1)$; (c) $(1, 1)$ és $(1, -1)$;
(d) $(1, 1)/\sqrt{2}$ és $(1, -1)/\sqrt{2}$. Írjuk föl $(1, 2)$ koordinátáit a (b)- és (d)-beli bázisban is.
2. Melyik bázis \mathbb{R}^3 -ben? (a) $\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$; (b) $\{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (3, 2, 1)\}$;
(c) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 4), (1, 3, 9)\}$; (d) $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$. Mik $(1, 0, 0)$ koordinátái?
3. Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját, és adjunk meg egy-egy bázist.
 - (1) A komplex számok \mathbb{R} felett; a legfeljebb n -edfokú T feletti polinomok a T test felett.
 - (2) A legfeljebb n -edfokú \mathbb{C} feletti polinomok \mathbb{R} felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér \mathbb{R} és \mathbb{C} feletti dimenziója között?
 - (3) Azon legfeljebb n -edfokú \mathbb{Q} feletti polinomok \mathbb{Q} felett, melyeknek 2; illetve $\sqrt{2}$ gyöke.
 - (4) Az \mathbb{R}^n azon elemei \mathbb{R} felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.
 - (5) A $T^{2 \times 3}$; illetve $T^{n \times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a T test felett.
 - (6) Egy X halmaz páros elemszámú részhalmazai \mathbb{F}_2 fölött.
4. Határozzuk meg $\{x-1, x^2-3x+2, x^2-6x+5\}$ és $\{x^2+2x+2, 2x^2-3x+6, 3x^2-8x+10\}$, valamint az **I/1**, **I/3(a)**, **I/16** feladatokban szereplő vektorrendszerek rangját.
5. Bizonyítsuk be, hogy $r(\{v_1, v_2, v_3\}) = r(\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\})$.
6. Egy \mathbb{R} fölötti vektortérben egy 100 elemű vektorrendszer elemei közül bármely 21 darab összefüggő. Legalább hány olyan vektor van a rendszerben, ami függ a többitől?
7. Adjuk meg \mathbb{R}^4 megadott két-két alterének összegét és metszetét. (a) Az első három, illetve az utolsó három koordináta ugyanaz. (b) Az első három, illetve az utolsó három koordináta összege nulla. (c) Minden koordináta egyenlő, illetve a koordináták összege nulla.
8. Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.
9. (*) Legyen V véges dimenziós vektortér, és U, W alterek V -ben. Bizonyítsuk be, hogy $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.
10. Hány $n - 1$ -dimenziós altere van egy \mathbb{R} feletti n -dimenziós vektortérnek $n \geq 2$ esetén?
11. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n -dimenziós V vektortérben?
 - (1) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.
 - (2) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.
 - (3) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.
 - (4) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 - (5) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 - (6) Ha F elemszáma n , és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
 - (7) Ha G elemszáma n , és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.
 - (8) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.
 - (9) Van olyan $n + 1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.
12. (*) A szultán gondolt \mathbb{R}^{1001} -ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?