Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

A 13. előadás-diához tartozó feladatsor

1. Az alábbi függvények közül melyek multiplikatívak, melyek additívak?

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad f(n) = -3\log(n)\,. \qquad f(n) = (-1)^{n+1}\,.$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{ha } n = p^\alpha, \text{ ahol } p \text{ prím és } \alpha \geq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2. Létezik-e olyan $f(n)$ multiplikatív függvény, amely az $f(1) = 1$ értéket kivéve csak negatív értékeket vesz fel?

3. Legyenek $f(n)$ és $g(n)$ nem azonosan nulla multiplikatív függvények. Bizonyítsuk be, hogy $h(n) = f(n) + g(n)$ nem multiplikatív!

4. A török szultán börtönében száz cella van, minden cellában egy-egy rab senyved. A szultán úgy dönt jókedvében, hogy néhány rabot szabadon bocsát. Alaphelyzetben minden cella zárva van, ugyanaz a kulcs nyitja mindegyiket, és a kulcsot csak egyetlen irányba lehet forgatni (egy fordítás kinyit, két fordítás újra bezár). A szultán elküld egy őrt, hogy fordítson egyet minden záron. Aztán elküld egy másikat, hogy fordítson minden másodikon. És így tovább, a századik őr csak a századik ajtó zárján fordít (A rabok nem vesznek semmit észre és nem szöknek meg). A századik őr akciója után amelyik cella ajtaja nyitva van, onnan a rab távozhat. Hány rab fog szabadulni, és honnan?

5. A 100-nál kisebb számok közül melyiknek van a legtöbb osztója?

6. Igazoljuk, hogy ha p és $2^p - 1$ egyszerre prímszám, akkor $2^{p-1}(2^p - 1)$ tökéletes szám.

7. Bizonyítsuk be, hogy az a és b pozitív egészekre $d(ab) \leq d(a)d(b)$, és egyenlőség csak akkor teljesül, ha $(a, b) = 1$.

8. Bizonyítsuk be, hogy $d(n) \leq n/2 + 1$, továbbá $d(n) \leq n/3 + 2$, stb. Hol végződik a sorozat?

9. Oldjuk meg a $\sigma(x) = x + 3$ egyenletet.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 2$ egész szám, akkor $\sigma(n) < 2n \log n$.

11. Igazoljuk, hogy $d(n) + \varphi(n) \leq n + 1$. Mikor van egyenlőség?

12. Mely egész számokra teljesül, hogy $\varphi(n^2) = \varphi(n) + 10$?

13. Számítsuk ki $\sum_{d|n} \mu(d)\frac{\sigma(d)}{\varphi(d)}$ értékét explicit képlettel (vö. Möbius-megfordítás, 29. dia).

14. Mikor lesz $\sigma(p^4)$ négyzetszám? (A p prím.)

Az alábbi feladatok megoldásához olvassuk el a 27. dián található Hensel-lemmát.

15. Oldjuk meg a $3x^2 + 5x - 2 \equiv 0$ (12) és az $x^3 + x + 3 \equiv 0$ (125) kongruenciákat.

16. ***(*)*** Tegyük fel, hogy p páratlan prím és $p \nmid a$. Igazoljuk, hogy az $x^2 \equiv a$ (p) kongruencia pontosan akkor oldható meg, ha az $x^2 \equiv a$ (p^n) kongruencia minden $n \geq 1$-re megoldható.

17. ***(*)*** Legyen $a \equiv 1$ (8). Mutassuk meg, hogy az $x^2 \equiv a$ (2^n) kongruencia minden $n \geq 1$-re megoldható.

18. ***(*)*** Igazoljuk, hogy $\sigma(n)\varphi(n) \leq n^2 - 1$ és $\sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n$. Mikor áll egyenlőség?