Bsc algebra és számelmélet normál gyakorlat

Első zárthelyi (2022. október 24.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges** (a számolás részletei), a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 6 pontosak. Az első három feladatból 12 pontot el kell érni az elégségeshez, ha ez megvan, akkor a ZH jegye az összpontszám hatoda. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. **A név és a NEPTUN-kód minden lapon szerepeljen.**

1. Adjuk meg a $17x+37y = 128$ egyenlet összes olyan megoldását, ahol x és y is pozitív egész (3 pont). Számítsuk ki $52^{12345682}$ utolsó két számjegyét a tízes számrendszerben (3 pont).

2. Számítsuk ki és ábrázoljuk a $-1 + \sqrt{3}i$ komplex szám három köbgyökét (2 pont). Ábrázoljuk azoknak a z komplex számoknak a halmazát a síkon, melyekre $(z + 3)/(\overline{z} + 1)$ valós szám (4 pont).

3. Mik $m^2 + m + 2$ és $m + 3$ legnagyobb közös osztójának lehetséges (pozitív) értékei? Mindegyikhez adjunk is meg egy-egy konkrét m egész számot, ami megvalósítja (4 pont). Mely $n \geq 0$ egészekre lesz $n^2 - 3n + 2$ prímszám (2 pont)?

4. Adjuk meg Gauss-eliminációval az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

5. Határozzuk meg $4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ racionális, majd az összes komplex gyökeit is, és ezek multiplicitását.

6. Oldjuk meg az $x^2 - 11 = 2z^2$ diofantikus egyenletet.