1. Komplex egységgyökök

Az 1 szám n-edik gyökei

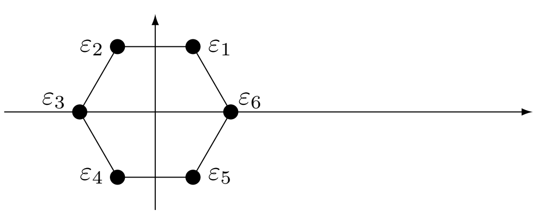
Definíció (K1.5.3, K1.5.4)
Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$
$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\Big)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa
A negyedik egységgyökök a következők.
$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i = i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i = -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i = -i.\\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) &= 1 + 0i = 1.
\end{aligned}$$

A hatodik egységgyökök

Példa
A hatodik egységgyökök a következők.
$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.\\
\varepsilon_2 &= \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.\\
\varepsilon_3 &= \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.\\
\varepsilon_4 &= \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.\\
\varepsilon_5 &= \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.\\
\varepsilon_6 &= \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.
\end{aligned}$$



Szabályos hatszöget alkotnak.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás
Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai. A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

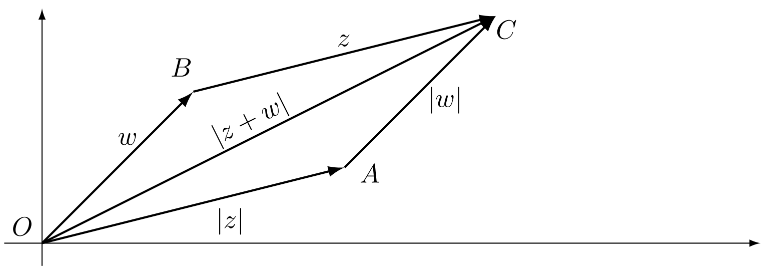
Tétel (K1.5.4)
Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke, akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke. Vagyis w_0*-t végig kell szorozni az* n*-edik egységgyökökkel.*

Bizonyítás
$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor, ha w/w_0 egy n-edik egységgyök. Ha $w/w_0 = \varepsilon_k$, akkor $w = \varepsilon_k w_0$. □

2. Geometria a komplex számsíkon

A háromszög-egyenlőtlenség

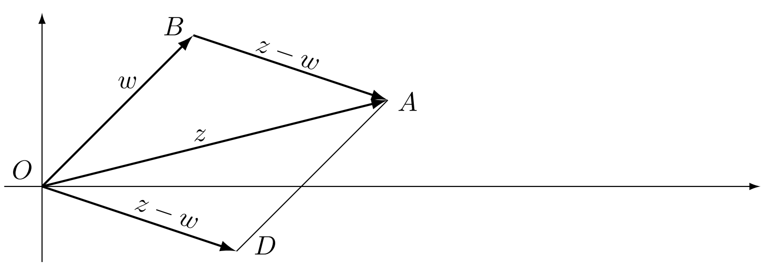
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)
Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. *Egyenlőség* pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas valós $r \geq 0$-ra.



Bizonyítás
Háromszög-egyenlőtlenség az OAC háromszögre. □

Két pont távolsága

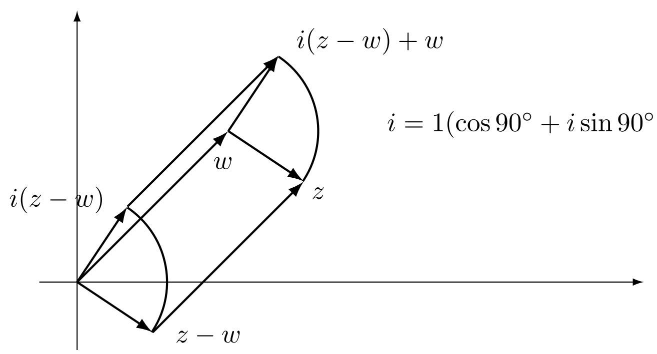
Állítás (K1.4.7)
Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



Bizonyítás
Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$, hiszen $w + (z - w) = z$. De $z - w$ hossza $|z - w|$. □

Forgatás pont körül
Mi a z pont w körüli +90 fokos elforgatottja?

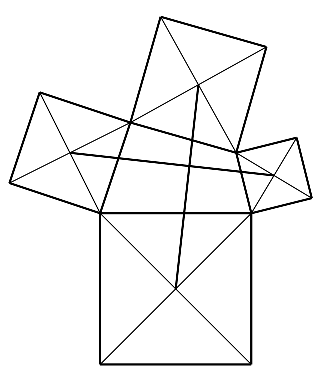
K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás *forgatva nyújtás*: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.



A $\overrightarrow{wz} = z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk, azaz w-t hozzáadunk.

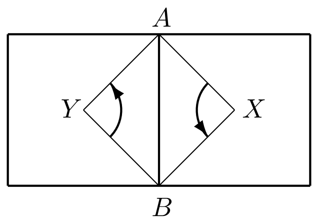
Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait. Igazoljuk, hogy e két szakasz *merőleges*, és *egyenlő hosszú*.



Négyzet középpontja

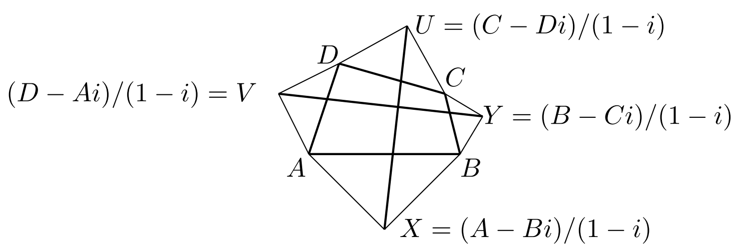
Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.
Így $A = i(B-Y)+Y$. Innen $Y = (A-Bi)/(1-i)$.

A négyszöges feladat megoldása



$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big(\big(C-Di\big) - \big(A-Bi\big)\Big)$.
$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big(\big(D-Ai\big) - \big(B-Ci\big)\Big)$. De
$i\big((C-Di)-(A-Bi)\big) = \big((D-Ai)-(B-Ci)\big)$.
Azaz $i(U-X) = V-Y$, így $\overrightarrow{XU}$ $+90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{YV}$. $\square$

3. Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele
Gyökvonás létezése: az $x^n - w$ polinomnak *van* gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Az algebra alaptétele (K2.5.4)
Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak *van* gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs
A tétel bizonyításához az *analízis* eszközei szükségesek. Harmadéven: bizonyítás *komplex függvénytan* segítségével. Másodéven: *bizonyítás Galois-elmélet* segítségével.

Felhasznált segédtétel:
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis *Bolzano-tételével*, de következik az algebra alaptételéből is (később).

4. Összefoglaló

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).

Tételek
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3). Két pont távolsága (K1.4.7). Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra). Az algebra alaptétele (K2.5.4).