1. A komplex számok ábrázolása (K1.4. szakasz)

A komplex számsík

Ahogy a valós számokat a számegyenesre képzeljük, az $a + bi$ komplex számot a sík (a, b) pontjával ábrázoljuk.

Például $i = 0 + 1i$ a $(0, 1)$ pontnak felel meg.

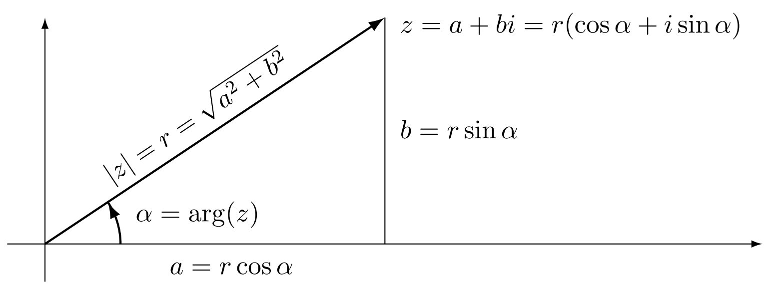
A valós számok az x-tengelyen helyezkednek el, ennek neve *valós tengely*. A tisztán képzetes számok az y-tengelyen vannak, ennek neve *képzetes tengely*.

Tétel (K1.4.1)
Az (a, b)-be mutató helyvektort azonosítjuk $a + bi$-vel.
Mivel $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$, ezért *a komplex számokat ugyanúgy kell összeadni, mint a nekik megfelelő helyvektorokat.*

2. A trigonometrikus alak

Komplex szám hossza és szöge

A $z = a + bi$ *hossza* az origótól mért távolsága. Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.

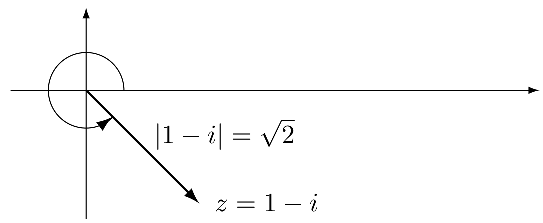


A $z \neq 0$ *szöge* a valós tengely pozitív felével bezárt szög.
Ez irányított szög, $0 \leq \arg(z) < 360°$. Nyilván $a = |z|\cos\alpha$ és $b = |z|\sin\alpha$.
Ezért z-t egyértelműen meghatározza a hossza és a szöge.

Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció (K, 18. oldal)
A $z \neq 0$ *trigonometrikus alakja* $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza, $\alpha = \arg(z)$ pedig a z szám szöge. A $z = a + bi$ az *algebrai alak*.

Példa
Az $1-i$ hossza $\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Szöge $315°$ (*nem* $45°$). Így trigonometrikus alakja $1-i=\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$.



A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa
A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge $180°$ (*nem* $0°$). Így trigonometrikus alakja $-4=4(\cos 180° + i\sin 180°)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja. Az $r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ szám *nincs* trigonometrikus alakban!

Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ felírásban érdemes megengednünk olyan α szöget is, ahol $0\le\alpha<360°$ nem feltétlenül teljesül.

Pl. $1-i=\sqrt{2}\big(\cos(-45°)+i\sin(-45°)\big)$ emberközelibb felírás.

Állítás (K1.4.4, HF ellenőrizni)
Ha $r,s>0$ valós, akkor $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=s(\cos\beta+i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r=s$, és $\alpha-\beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel (K1.4.5)
Komplex számok szorzásakor *hosszuk összeszorzódik*, *szögük* pedig *összeadódik*.

Bizonyítás
Legyen $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ és $w=s(\cos\beta+i\sin\beta)$. Ekkor
$zw=rs\big((\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)i\big)$.
Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Emlékeztető: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

<u>Példa:</u> $1-i=\sqrt{2}(\cos 315°+i\sin 315°)$ négyzete
$(1-i)^2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315°+315°)+i\sin(315°+315°)\big)=$
$=2(\cos 630°+i\sin 630°)=2(\cos 270°+i\sin 270°)=$
$=2\big(0+i(-1)\big)=-2i$.

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat (K1.4.6)
Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete (K, 20. oldal)
$\big(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\big)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$. Azaz *hatványozáskor* a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

HF: A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa
$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\big(\cos(1526\cdot 315°) + i\sin(1526\cdot 315°)\big) =$
$= 2^{763}(\cos 90° + i\sin 90°) = 2^{763}(0+1i) = 2^{763}i.$

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$
$1526/2 = 763$
$1526\cdot 315 = 480690 = 1335\cdot 360 + 90$

3. Gyökvonás komplex számból

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:
Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 2π egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$. Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)
Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha
$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$,
akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k\cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right).$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

$-4 = 4(\cos 180° + i\sin 180°) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4)+i\sin(\ \pi/4)\big) = \ \ 1+i.$
$k=1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)\big) = -1+i.$
$k=2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4)\big) = -1-i.$
$k=3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4)+i\sin(7\pi/4)\big) = \ \ 1-i.$ Tovább?

A negyedik gyökök száma

$-4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\Big(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\Big) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4)+i\sin(\ \pi/4)\big) = 1+i.$
$k=4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4)+i\sin(9\pi/4)\big) = 1+i$, mint $k=0$-ra. Oka: $9\pi/4 – \pi/4 = 2\pi$.
A szöget 2π-vel változtatva a szám nem változik.

$$\frac{\pi+2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi+2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi+2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m-k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt a gyököt adja. Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i.$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)
Minden nem nulla komplex számnak n *darab* n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\Big) \ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\alpha+2m\pi}{n} = \frac{\alpha+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\alpha+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)
Ha $m-k$ nem osztható n-nel, akkor a szögek különbsége nem lesz 2π egész többszöröse, és így a két n-edik gyök különböző. $\square$

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z+w$ függvény a w vektorral való *eltolás*.

Állítás (K1.4.5)
Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) *forgatva nyújtás*: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

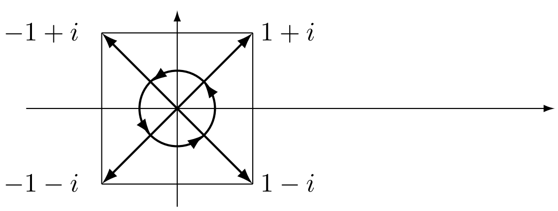
Bizonyítás
Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

Így az f függvény a z vektort β-val forgatja, s-szeresére nyújtja. □

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Ezek egy *négyzet* négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



Bizonyítás
$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i) = -1+i$. Hasonlóan $i(-1+i) = -1-i$, $i(-1-i) = 1-i$, $i(1-i) = 1+i$.

$i = 1(\cos 90° + i\sin 90°)$.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)
Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei *szabályos n-szöget* alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás
Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\alpha+2(k+1)\pi}{n}$.

De az ε-nal szorzás $2\pi/n$-nel forgat, ami a szabályos n-szögben egy oldalhoz tartozó középponti szög. □

4. Összefoglaló

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Komplex számsík (K1.4. szakasz). Komplex szám hossza, szöge, trigonometrikus alakja (K, 18. oldal).

Tételek
A komplex számok összeadása vektorösszeadás (K1.4.1). Szorzás trigonometrikus alakban (K1.4.5). A trigonometrikus alak egyértelműsége (K1.4.4). Hatványozás, Moivre képlete (K, 20. oldal). Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2). Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4). Forgatva nyújtás (K1.4.5).