1. A komplex számok definíciója

A számkör bővítése

Tétel
Nincs olyan n *természetes* szám, melyre $n + 3 = 1$.

Bizonyítás
Ha n természetes szám, akkor $n + 3 \geq 3$.

Ezért bevezettük a *negatív* számokat, közöttük van ilyen n. Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel
Nincs olyan r *valós* szám, melyre $r^2 = -1$.

Bizonyítás
Ha $r \geq 0$, akkor $r^2 \geq 0$. Ha $r < 0$, akkor is $r^2 = (-r)^2 \geq 0$.

Ezért be fogjuk vezetni a *komplex* számokat, amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

- egyenletek megoldásakor;
- geometriai alakzatok, valós függvények megértésekor;
- a fizikában (folyadékok áramlása, kvantummechanika, a téridő szerkezete).

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1 + i)^2$?

$(1 + i)(1 + i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \ = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)
$(a + bi)(c + di) =(ac - bd) + (ad + bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Az i-vel úgy számolunk, mintha ismeretlen lenne, de i^2 helyett -1-et írunk.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)
Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok. A $z = a + bi$ *valós része* $\mathrm{Re}(z) = a$. A $z = a + bi$ *képzetes része* $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész *valós* szám, *NEM* bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$. A bi alakú számok *tisztán képzetesek* (valós részük nulla).

Az i az *imaginárius* (képzetes) szó rövidítése.

2. Műveletek komplex számokkal

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:
A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$. A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$. A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$. Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ *ellentettje* w, ha $z + w = 0$. Az ellentett jele $-z$. A $z = a + bi$ (egyetlen) ellentettje $w = (-a) + (-b)i$. A kivonás az ellentett hozzáadása: $u - z = u + (-z)$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám *reciproka* u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az *osztás* a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Tehát

$$(1 + i)\frac{1 - i}{2} = 1\,, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

A reciprok kiszámítása
Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$.

Figyelem! Az eredmény *NEM* $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i\,.$$

Ez értelmes, ha $a + bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla, és ezért $a^2 + b^2 > 0$ (azaz nem nulla).

Következmény (K1.3.6)
Minden nem nulla komplex számnak van reciproka, ezért minden nem nulla komplex számmal lehet osztani.

3. Konjugált és abszolút érték

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)
A $z = a + bi$ *konjugáltja* $\overline{z} = a - bi$. A $z = a + bi$ *abszolút értéke* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés (K1.3.8)
Komplex számok között *nem igaz*, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$.
Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$. Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$, tehát ugyanaz, mint az abszolút érték „régi" értelme.

Nem használhatunk egyenlőtlenségeket nem valós komplex számok között. Értelmetlen olyat leírni, hogy $i > 0$ vagy $i < 0$.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)
Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:
Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor
$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$.
$\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$.
Ezek tényleg egyenlők. $\square$

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)
Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\,\overline{z}\,| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:
$|zw|^2 = zw\ \overline{zw} = zw\ \overline{z}\ \overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$. Mivel $|zw| \geq 0$ és $|z||w| \geq 0$, négyzetgyököt vonhatunk. $\square$

Az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt.
Felhasználjuk, hogy a konjugálás szorzattartó.

4. Műveleti tulajdonságok

A műveleti tulajdonságok
Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)
Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a *nullelem*).

(4) Minden x-nek van *ellentettje*.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 *egységelem*).

(8) Minden nem nulla x-nek van *reciproka*.

(9) $(x + y)z = xz + yz$ (*disztributivitás*).

Mintabizonyítás: K1.3.4. Gyakorlat.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)
A komplex számok szorzása *nullosztómentes:* két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás
Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$. Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$. Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0\,.$$

Ezzel elvégeztük a K1.3. szakaszt.

5. Összefoglaló

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K1.3. és 1.4. szakasz)
Komplex szám, valós és képzetes rész, tisztán képzetes szám, összeadás, kivonás, szorzás, ellentett (K1.3.2). Reciprok, osztás (K1.3.6), konjugált, abszolút érték (K1.3.9).

Tételek
Műveleti tulajdonságok (K1.3.3), nullosztómentesség (K1.3.7). A konjugált és az abszolút érték tulajdonságai (K1.3.10).