1. Polinomok

A polinom szemléletes fogalma

K2.1 (azaz Kiss: Algebra, 2.1. szakasz)
Polinomnak nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely számokból, és az x betűből készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével. Az x neve *határozatlan* (vagy *változó*).

Példa
$\big((4x - x^2)(x - \ 23) + 2x - 7\big)^2 + 43x^3 - \pi$ egy polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk, majd x hatványai szerint rendezhetünk. Az eredmény:
$x^6 - 54x^5 + 909x^4 - 4803x^3 + 7722x^2 + 1260x + 49 - \pi$. (`https://www.wolframalpha.com/`)

A polinom definíciója

Definíció
Egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket, ahol $n \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_n$ számok. Az x neve *határozatlan.* Az a_jx^j a polinom egy *tagja*, az x^j *együtthatója* a_j. Az $a_0 = a_0x^0$ a *konstans tag.*

Definíció (K2.1.1)
Két polinom akkor *egyenlő*, ha a megfelelő együtthatóik megegyeznek (x^j együtthatója ugyanaz a két polinomban minden $j \geq 0$-ra).

$x^2 - 1 = 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-1)$ és $x^3 - 1 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-1)$ nem egyenlők, mert például az x^3 együtthatója más a két polinomban.

A nullapolinom

Definíció (K2.1. szakasz)
A *nullapolinom* az a polinom, amelynek minden együtthatója nulla. Ugyanúgy 0 jelöli, mint a 0 számot vagy a 0 mátrixot.

Minden c számot polinomnak tekintünk (amelyben x^j együtthatója nulla minden $j \geq 1$ esetén, konstans tagja pedig c). Ezek a *konstans* polinomok.

$\mathbb{R}[x]$: a *valós* együtthatós polinomok halmazának jele.
$\mathbb{Q}[x]$: a *racionális* együtthatós polinomok halmazának jele.
$\mathbb{Z}[x]$: az *egész* együtthatós polinomok halmazának jele.
A határozatlan jele más is lehet: $\mathbb{R}[y]$, $\mathbb{Z}[u]$.
<u>Példa:</u> $\pi y^2 + 3 \in \mathbb{R}[y]$, de $\pi y^2 + 3 \notin \mathbb{Q}[y]$, mert π irracionális szám.

2. Műveletek polinomok között

Polinomok kibővítése nulla tagokkal

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots .$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots.$ Így bármely két polinomot ugyanannyi taggal írhatunk fel:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n .$$

Példa:

$$x^2 - x + 1 = 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 1$$
$$x^3 + 1 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 .$$

Így kényelmesebb lesz értelmezni polinomok összegét.

Polinomok összege, különbsége, ellentettje

Definíció (K 35. oldal)
Legyen

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n .$$

E polinomok összege és különbsége:

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$
$$(f - g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n .$$

Nyilván $f + 0 = 0 + f = f$ minden f polinomra.

Az $f \in \mathbb{R}[x]$ *ellentettje* h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Példa polinomok szorzatára

Kérdés
Hogyan definiáljuk az $(a_0 + a_1x)(b_0 + b_1x + b_2x^2)$ szorzatot? Például mi legyen x^2 együtthatója?

Állítás (K2.1.4. Gyakorlat)
Az $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_m)$ eredménye az nm darab u_jv_ℓ tag összege ($1 \le j \le n$ és $1 \le \ell \le m$). A két zárójelből kiveszünk egy-egy tagot az összes lehetséges módon, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

x^2-es tag kétféleképpen keletkezhet: $a_0(b_2x^2)$ és $(a_1x)(b_1x)$. Ezért x^2 együtthatója legyen $a_0b_2 + a_1b_1$. A végeredmény:
$a_1b_2x^3 + (a_0b_2 + a_1b_1)x^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_0b_0$.

Polinomok szorzatának definíciója

Definíció
$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$-ben
x^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.

Magyarázat
x^k-os tag akkor keletkezik $(a_jx^j)(b_\ell x^\ell)$-ből, ha $j + \ell = k$.

Példa
Az x^{n+m} együtthatója

$$a_0b_{n+m} + \ldots + a_{n-1}b_{m+1} + a_nb_m + a_{n+1}b_{m-1} + \ldots + a_{n+m}b_0\,.$$

Tudjuk, hogy $\ell > m$ esetén $b_\ell = 0$. Így az első n tag nulla. Tudjuk, hogy $j > n$ esetén $a_j = 0$. Így az utolsó m tag nulla. Vagyis x^{n+m} együtthatója a_nb_m.

3. Polinomok foka

Polinom foka

Definíció
Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f *foka* n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. Tehát a fok a legnagyobb olyan kitevő, amelyhez tartozó együttható nem nulla. *A nullapolinomnak nincs foka.* Az $f(x)$ k-adfokú tagja a_kx^k, *főtagja* a_nx^n, *főegyütthatója* a_n. Az $f(x)$ *normált polinom*, ha főegyütthatója 1.

Tétel (K2.1.5)
Szorzásnál a fokok összeadódnak: $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás
$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ esetén láttuk, hogy x^{n+m} együtthatója a_nb_m. Ez nem nulla, ha a_n és b_m nem nulla. HF: Magasabb fokú tag nem keletkezik. □

A szorzat foka: következmények

Következmények (K2.1.7)

(1) A polinomok szorzása *nullosztómentes*, azaz nem nulla polinomok szorzata sem a nullapolinom.

(2) Egy f polinomnak pontosan akkor van *reciproka* a valós együtthatós polinomok között, ha nem nulla konstans polinom.

Bizonyítás
(1): Láttuk, hogy ha f és g nem nulla, akkor fg-nek van nem nulla együtthatója (a két főegyüttható szorzata), így $fg \neq 0$.
(2): Ha $fg = 1$, akkor $0 = \mathrm{gr}(1) = \mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.
Ezért $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) = 0$, azaz mindkettő nem nulla konstans.
Megfordítva, ha $c \neq 0$ konstans, akkor reciproka, azaz $1/c$ is (konstans) polinom.

HF: fg konstans tagja f és g konstans tagjainak szorzata.

Összeg foka

Tétel (K2.1.2)
Két polinom összegének a foka legfeljebb akkora, mint a két polinom fokai közül a nem kisebb: $\mathrm{gr}(f+g) \leq \max(\mathrm{gr}(f), \mathrm{gr}(g))$. Ha a két polinom foka különböző, akkor egyenlőség áll.

Pl. $2 = \mathrm{gr}(x^2+1) = \mathrm{gr}(-x^2+x) > \mathrm{gr}\big((x^2+1) + (-x^2+x)\big) = 1$.

Bizonyítás
$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$, ahol feltehetjük, hogy például a_n nem nulla, azaz $\mathrm{gr}(f) = n$. Ha $b_n = 0$, akkor $\mathrm{gr}(g) < n$, és $f+g$ főegyütthatója a_n, azaz $\mathrm{gr}(f+g) = \mathrm{gr}(f) = n$.
Ha $b_n \neq 0$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) = n$. De $a_n + b_n = 0$ is lehet, amikor is $\mathrm{gr}(f+g) < \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g)$.

4. A szumma és produktum jelölés

Összegek tömör alakja

Definíció
Az $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összeget így rövidítjük: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$. A *szumma* jel utáni kifejezéseket kell összeadni a j azon értékeire, amit a jel alatt és fölött megadunk.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell x^\ell$$

esetén $(fg)(x) = \sum\limits_{k=0}^{m+n} c_kx^k$, ahol $c_k = \sum\limits_{j=0}^{k} a_jb_{k-j} = \sum\limits_{j+\ell=k} a_jb_\ell$.

A produktum jelölés

Definíció
A $\prod$ produktum jelölés hasonló a szumma jelöléshez, csak összeadás helyett szorozni kell. Példák: $\prod\limits_{j=2}^{n} a_j = a_2a_3 \ldots a_n$.
$\prod\limits_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$ (n faktoriális).

Megállapodás
Egytagú összeg és szorzat az egyetlen tagjával egyenlő. Az *üres összeg* értéke 0. Az *üres szorzat* értéke 1.
Példa: $\sum\limits_{j=3}^{3} b_j = b_3$, $\sum\limits_{j=3}^{2} b_j = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_jx^j = 0$, ha $n = 0$.
Magyarázat: K2.2.42. Gyakorlat.

5. Polinomfüggvény és gyök

Behelyettesítés polinomba

Definíció (K2.4.1)
Legyen b egy szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom b *helyen felvett helyettesítési értéke* $f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n$ (az x helyére b-t írunk). Az f-hez tartozó f^* *polinomfüggvény* az az f^* függvény, mely minden b számhoz $f^*(b)$-t rendel.

Állítás (K2.4.2)
Ha $f, g \in \mathbb{R}[x]$ és $b \in \mathbb{R}$, akkor $(f+g)^*(b) = f^*(b) + g^*(b)$ és $(fg)^*(b) = f^*(b)g^*(b)$.

A polinomok összeadását és szorzását pontosan azzal a motivációval definiáltuk, hogy ez az állítás igaz legyen.

A gyök és a gyöktényező

Definíció (K2.4.5)
A b szám *gyöke* az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$.

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége, K2.4.6)
A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x-b)q(x)$.

Az $x - b$ a b gyökhöz tartozó *gyöktényező*.

Bizonyítás
Ha $f(x) = (x-b)q(x)$, akkor $f^*(b) = (b-b)q^*(b) = 0$.
A megfordítást legközelebb bizonyítjuk.

HF: Vezessük le ezt a megfordítást az $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1}b^i$ azonosságból.

6. Összefoglaló

A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K2.1)
Határozatlan; polinomok, egyenlőségük (K2.1.1). Tag, együttható, főtag, normált polinom, fok, konstans tag. Nullapolinom, összeg, ellentett, szorzat. Polinomfüggvény (K2.4.1), polinom gyöke (K2.4.5). Nullosztómentesség (K2.2.27). A szumma és produktum jelölés.

Tételek
Összeg és szorzat foka (K2.1.2, K2.1.5). Polinomfüggvények összege és szorzata (K2.4.2). Gyöktényező kiemelhetősége (K2.4.6).