1. A gyökök és együtthatók összefüggése

A gyöktényezős alak beszorzása

Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)
Legyen T test. Az $f \in T[x]$ polinom *gyöktényezős alakja* $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$, ahol $c, b_1, \dots, b_n \in T$, és $c \neq 0$ az f főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

Beszorzás másodfokú polinomokra
Legyen $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x-b_1)(x-b_2)$.
De $(x-b_1)(x-b_2) = x^2 - (b_1+b_2)x + b_1b_2$.
Tehát $f(x) = a_2(x-b_1)(x-b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1+b_2)x + a_2b_1b_2$.
Ezért $-a_2(b_1+b_2) = a_1$ és $a_2b_1b_2 = a_0$.
Innen $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$ és $b_1b_2 = a_0/a_2$.
Ez a *gyökök és együtthatók összefüggése*, ha $n = 2$. □

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

A harmadfokú polinomok esete

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$.
Mi lesz $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$ beszorzott alakja? Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.
Ha mindhárom zárójelből az x-et vesszük ki: x^3.
Ha két zárójelből veszünk ki x-et, akkor 3 tag keletkezik: $-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2$.
Ha egy zárójelből veszünk ki x-et: $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$.
Végül ha egyik zárójelből sem az x-et vesszük ki: $-b_1b_2b_3$.
$x^3 - (b_1+b_2+b_3)x^2 + (b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x - b_1b_2b_3$. Így

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= -a_2/a_3\,, \\ b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 &= a_1/a_3\,, \\ b_1b_2b_3 &= -a_0/a_3\,. \end{aligned}$$

Ez *a gyökök és együtthatók összefüggése*, ha $n = 3$. □

A négyzetösszeg

Feladat (K2.5.13)
Állapítsuk meg az $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

Megoldás
$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) =$? Az első zárójelből minden tagot megszorzunk a második zárójelbeli minden taggal. b_1^2, b_2^2, b_3^2 *egyszer*, b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3 mind *kétszer* keletkezik. Például b_2b_3 úgy is, mint b_3b_2. Az eredmény:
$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)$.
$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)$.
$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5$.
$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5$.
$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (2/5)^2 - 2(3/5) = -26/25$. □

Az általános eset

Állítás (K2.5.8)
$(x - b_1)\dots(x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$
$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
$\sigma_2 = b_1b_2 + \dots + b_1b_n + b_2b_3 + \dots + b_{n-1}b_n$, és így tovább,
$\sigma_n = b_1b_2\dots b_n$.
σ_k úgy keletkezik, hogy k darab különböző b_i-t összeszorzunk az összes lehetséges módon, és ezt az $\binom{n}{k}$ szorzatot összeadjuk.

Bizonyítás
Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk. x^{n-k}-s tag úgy keletkezik, hogy $n - k$ zárójelből x-et, a többi k zárójelből valamelyik $-b_j$-t vesszük ki. Ezért x^{n-k} együtthatója $(-1)^k \sigma_k$ lesz. □

A gyökök és együtthatók összefüggése

Definíció
$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$: az összes lehetséges módon összeszorzunk k különbözőt $b_1, \dots, b_n$ közül, ezt az $\binom{n}{k}$ szorzatot összeadjuk. (Megállapodás: $\sigma_0 = 1$ és $\sigma_k = 0$ ha $k > n$.) Elnevezés: *elemi szimmetrikus polinom*. Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

Tétel (K2.5.9)
Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1)\dots(x - b_n)$. Ekkor $0 \leq k \leq n$ esetén $a_k = a_n(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$, így

$$\sigma_k(b_1, \dots, b_n) = (-1)^k a_{n-k}/a_n \,.$$

Ez a *gyökök és együtthatók összefüggése* (Viète-formulák). □

Az $(x - b_1)\dots(x - b_n)$ beszorzott alakjából következik.

Alkalmazás: az egységgyökök összege

Állítás (K2.5.15)
$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Valóban, mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek. Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában. De $x^n - 1$ foka n, és így legfeljebb n gyöke lehet. Az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ páronként különböző, így ez az összes gyök. Az $x^n - 1$ főegyütthatója 1, ezért $c = 1$-gyel kell szorozni. □

Következmény
Az n-edik egységgyökök összege nulla, ha $n > 1$, mert ekkor $x^n - 1$-ben x^{n-1} együtthatója $a_{n-1} = 0$. □

$b_1 + \ldots + b_n = \sigma_1(b_1, \ldots, b_n) = (-1)^1 a_{n-1}/a_n$.

2. Többhatározatlanú polinomok

A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

Meta-definíció
A *többhatározatlanú polinom* egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az $x_1, x_2, \ldots$ *határozatlanokból* (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás, szorzás segítségével.

Példa
$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$ egy kéthatározatlanú polinom. A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk. Az eredmény: $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$.

Definíció-kísérlet
$\sum r_{m_1,m_2,\ldots,m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$, ahol $r_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$ egy szám.

Kényelmesebb a következő:

A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$. Rendezzük x_2 szerint:
$(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$. Ez x_2-nek másodfokú polinomja, ahol *az együtthatók x_1-nek polinomjai.*

Definíció (K2.6.1)
Az x_1 és x_2 határozatlanok polinomjának nevezzük az
$f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_mx_2^m$ formális kifejezéseket, ahol $m \geq 0$ egész, és $a_0, \ldots, a_m$ az x_1 polinomjai.
Általában, legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű. Ekkor $R[x_1, \ldots, x_n]$-et n szerinti indukcióval (rekurzióval) értelmezzük: $R[x_1, x_2] = \big(R[x_1]\big)[x_2]$, és így tovább,
$R[x_1, \ldots, x_n] = \big(R[x_1, \ldots, x_{n-1}]\big)[x_n]$. Vagyis a határozatlan x_n, az együtthatók a már definiált $n-1$-határozatlanú polinomok gyűrűjének elemei.

Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

Példák
$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$, sőt, $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$, mert minden együttható egész. Ugyanígy $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$.

Tétel (K2.6.2)
Ha R kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor $R[x_1, \ldots, x_n]$ is az. Ha R nullosztómentes, akkor $R[x_1, \ldots, x_n]$ is az, és az invertálható elemei azok a konstans polinomok, amelyek R-ben invertálhatók. (Nyilvánvaló n szerinti indukcióval.)

Legyen $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum r_{m_1,m_2,\ldots,m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$.
Az $r_{m_1,m_2,\ldots,m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ tag *foka* $m_1 + \ldots + m_n$. Az f *foka* a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb. Jele: $\mathrm{gr}(f)$.

A fokszám tulajdonságai

Példa
$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ foka 4:
$\mathrm{gr}(x_1^4) = 4 = \mathrm{gr}(x_1^3x_2)$, de $\mathrm{gr}(x_1x_2) = 2 = \mathrm{gr}(x_2^2)$.

Fontos: Az x_2 polinomjaként írva foka 2 és *nem* $\mathrm{gr}(f) = 4$.
$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

Egy polinom *homogén k-adfokú*, ha minden tagjának foka k.

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:
$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$, ahol $n = \mathrm{gr}(f)$.
Az f_j az f polinom j-edfokú tagjaiból áll.

Következmény (K2.6.3)
Szorzásnál a fokok összeadódnak: $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$. □

A szimmetrikus polinomok alaptétele

Példa
A négyzetösszeg: $s_2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.
Vagyis ha $F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \underline{y_1^2 - 2y_2}$, akkor $s_2 = \underline{F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)}$.
Tehát s_2 az elemi szimmetrikus polinomok *polinomja*.

Tétel (K2.7.3, NB)
Legyen R szokásos gyűrű. Ekkor minden $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ szimmetrikus polinom *egyértelműen* fölírható az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Azaz létezik pontosan egy $F \in R[y_1, \ldots, y_n]$ polinom, melyre
$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$
A F együtthatói a f együtthatóiból összeadás és kivonás segítségével kaphatók.

3. Összefoglaló

A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
A σ_k elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom (K2.6.1).

Tételek
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák, K2.5.9).
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal (K2.5.13).
Az $x^n - 1$ gyöktényezős alakja (K2.5.15), az n-edik egységgyökök összege.
Nullosztómentesség többhatározatlanú polinomokra (K2.6.1).
Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka (K2.6.3).
A szimmetrikus polinomok alaptétele (K2.7.3, NB).