1. Függetlenség

Oszlopvektorok függetlensége
Az alábbiakban T a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli. Valójában T tetszőleges *test* lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

Definíció (F3.3.1–3)
Legyen $v_1 \dots, v_m \in T^n$. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \dots, v_m$ egy *lineáris kombinációja.* A $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az *együtthatói.*
A $v_1, \dots, v_m$ vektorok *lineárisan függetlenek*, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ *CSAK ÚGY* teljesülhet, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \dots, v_m \in V$ vektorok *lineárisan összefüggők.*

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \dots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha *CSAK* a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.
Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1 + 4\lambda_2\\3\lambda_1 + 5\lambda_2\end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$ és $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$. Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \dots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független,
ha az $x_1 v_1 + \dots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.
Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó, azaz minden oszlopban van vezéregyes.

Következmény (F3.3.4)
Ha $m > n$, vagyis ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor a rendszer összefüggő.
Valóban, mivel minden sorban csak egy vezéregyes lehet, lesz olyan oszlop, ahová nem jut. $\square$

Definíció (F3.3)
$v \in V$ *lineárisan függ* $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként.

A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött, ha nem párhuzamosak.

(7) A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő $\mathbb{R}$ fölött, ha egy síkban vannak.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

Állítás (F3.3.5)
Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor *VAN közöttük olyan*, amely lineárisan függ a többiektől.

Az *nem igaz*, hogy *mindegyik* függ a többiektől! Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)
v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla.
Ha például $\lambda_2 \neq 0$, akkor $v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1 - (\lambda_3/\lambda_2)v_3$. $\square$

2. Rang

A rang definíciója

Definíció (F3.4)
Egy vektorrendszer rangja r, ha r darab független vektor kiválasztható belőle, de több nem. Egy mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló rendszer rangja. Egy mátrix sorrangja a soraiból álló rendszer rangja.

Tétel (F3.4.2)
A Gauss-elimináció lépései során az oszloprang nem változik. Az oszloprang az elimináció során keletkező vezéregyesek száma.

Vegyük ki az oszlopok egy részhalmazát, és tekintsük a hozzájuk tartozó homogén lineáris egyenletrendszert. Az eredeti mátrixon a sorokkal végzett eliminációs lépések nem változtatják meg e lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát. Ezért nem változik az sem, hogy ezen oszlopok függetlenek-e (hiszen az attól függ, hogy van-e nemtriviális megoldás, vagy nincs).

A bizonyítás folytatása
Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Ha azonban oszlopok egy halmaza tartalmaz olyat, ahol nincs vezéregyes, akkor a hozzá tartozó egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, hiszen a megfelelő szabad változó helyébe írhatunk nem nulla számot. Ezért az elimináció végén az oszloprang tényleg ugyanaz, mint a vezéregyesek száma. $\square$
Az előző tétel gyors algoritmust ad az oszloprang meghatározására.

Tétel (F3.4.2)
Egy M mátrix sorrangja ugyanaz, mint az oszloprangja. (Ezt M rangjának nevezzük, és $r(M)$-mel jelöljük.) Egy mátrixnak és a transzponáltjának a rangja megegyezik.

Sorrang és oszloprang: Lemma

Lemma
Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy L mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük L-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje s a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, t a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort.
A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$.
A $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$ feltétel azt jelenti, hogy $Lt = w$.
A szorzás asszociativitása miatt $sw = s(Lt) = (sL)t = 0t = 0$.
Vagyis w komponenseinek a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja tényleg nulla. $\square$

Sorrang és oszloprang: következmény

Következmény
Ha egy N mátrixnak k sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább k.

Bizonyítás
Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot N-ből. Ezek $w_1, \ldots, w_m$, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix. Ekkor N oszloprangja m. Mivel $w_1, \ldots, w_m$, független, de bármely oszlopot hozzájuk véve már összefüggő rendszert kapunk (hiszen nincs m-nél több független oszlop) ezért N minden oszlopa függ $w_1, \ldots, w_m$-től.
Indirekt feltevés: $m < k$. Ekkor L sorai összefüggenek, mert T^m-ben bármely $k > m$ darab vektor összefügg. De akkor N sorai is összefüggenének a Lemma miatt, ellentmondás. $\square$

A rangok egyenlőségének bizonyítása

Sorrang = oszloprang
Legyen M sorrangja k. Vegyünk ki k független sort, a kapott részmátrix legyen N. Az előző Következmény miatt N oszloprangja legalább k, így M oszloprangja is legalább k (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az M transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

Az M mátrix *determinánsrangja* r, ha kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla, de $r + 1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (F3.4.2. Tétel)
Minden mátrix determinánsrangja egyenlő a rangjával.

Biz.: Gauss-elimináció. Négyzetes mátrixokra $\det(N) = \det(N^T)$, így új bizonyítást kapunk a sorrang és oszloprang egyenlőségére.

A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti $Mx = b$ egyenletrendszer mátrixa.

$[M, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$ a *kibővített* mátrix.

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (F3.4.3. Tétel)
Legyen $M \in T^{n\times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis M rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

Bizonyításvázlat
Akkor és csak akkor *van* megoldás, ha nincs tilos sor. A tilos sor azt jelenti, hogy $[M, b]$-ben még egyet karikázhatunk, vagyis $r(M) < r([M, b])$. Akkor és csak akkor *egyértelmű* a megoldás, ha M oszlopai lineárisan függetlenek is. □

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)
Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

Bizonyításvázlat
Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$. Vonjuk ki az első sorból sorban az i-edik sor λ_i szeresét. Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla. Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni). Tehát ebből a sorból ki tudtuk vonni a többi sor alkalmas skalárszorosát úgy, hogy csupa nulla sort kapjunk. □

3. Összefoglaló

A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége,
lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja (F3.3).
Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

Tételek
Dimenziónyinál több vektor összefügg (F3.3.4). A függés és a függetlenség tulajdonságai (F3.3.5). A rang meghatározása Gauss-eliminációval (F3.4.2).
A sorrang és az oszloprang egyenlősége (F3.4.2). Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának, és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével (F3.4.3). A determináns eltűnésének jellemzése (F3.2.3, 3.5.2).