1. A determináns kifejtése

Előjeles aldeterminánsok

Definíció (F1.4.1)
Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az i-edik sor j-edik, a_{ij} eleméhez tartozó M_{ij} *előjeles aldeterminánst* a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- A kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix *determinánsát*
- megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

A $(-1)^{i+j}$ előjel megjegyzésére szolgál a *sakktáblaszabály*:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2)
Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk. *Ekkor M determinánsát kapjuk.* Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re. Ugyanez sorokra is érvényes: $a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

FONTOS: Gauss-eliminációval *SOKKAL* gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel. A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$-ra 720.
A Gauss-elimináció maximum $n^3/2$ szorzás. Ez $n = 6$-ra 108.

Példa kifejtésre

Példa
A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:
$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$

Ugyanaz, mint $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ kifejtése a harmadik sor szerint, így 0.

Ferde kifejtés

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy *másik oszlophoz* tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény *nulla* lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$-ra. Sorokra:
$a_{j1}M_{k1} + a_{j2}M_{k2} + \ldots + a_{jn}M_{kn} = 0$ minden $j \neq k$-ra.

A ferde kifejtési tétel bizonyítása (F1.4.3)

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla. $\square$

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = a(-c) + ca = 0$ (első sor szerint, a második sorhoz tartozó aldeterminánsokkal).

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2, 2.2.3)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az *inverz képlete* $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$. Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, *transzponáljuk*, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$

Bizonyításvázlat: Ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$, így $\det(M) \neq 0$.
Megfordítva: A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (bármelyik sorrendben) M-mel szorozzuk, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF). $\square$

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$. Azaz *minden jobbinverz balinverz is.*

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$. Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$. Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$. Az asszociativitás miatt $K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN = N$. □

Valójában azt igazoltuk, hogy M mindegyik jobbinverze megegyezik M mindegyik balinverzével. Így *a kétoldali inverz egyértelmű.*

2. A Cramer-szabály

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2)
Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n\times n}$. Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$. Ilyenkor nyilván $x = M^{-1}b$ a megoldás képlete.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes. Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály (F3.2.1)
Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük. Ha $\det(M) \neq 0$, akkor a megoldás
$x_j = \dfrac{\det(M_j)}{\det(M)}$.

Példa a Cramer-szabályra

Példa
$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-5}{-4+15} = \frac{11}{11} = 1.$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás
Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre. Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$. Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1v_1 + x_2v_2 = b$ (HF). Ezért $\det(M_1) = \det[x_1v_1 + x_2v_2, v_2] = \det[x_1v_1, v_2] + \det[x_2v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. $\square$

$M_1 = [b, v_2]$ és $x_1v_1 + x_2v_2 = b$
Az első oszlopot összegre bontjuk.
Az x_1 és x_2 skalárokat kiemeljük az első oszlopból.
$\det[v_2, v_2] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

Vandermonde-determináns (F1.5.2)

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i).$$

Bizonyítás: gyakorlaton.

3. A determináns, mint mérték

A determináns egyértelműsége
A determináns fogalmát úgy építettük fel, hogy bizonyos tulajdonságokat kívántunk meg. Megmutatjuk, hogy ezekből már következik a determinánst definiáló (permutációs) képlet.

Tétel (F9.8.1)
Legyen $T = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyike, és D egy függvény, amely bármely n darab T^n-beli vektorhoz hozzárendeli T egy elemét.

(1) Tegyük fel, hogy D minden változóban lineáris;

(2) és ha D két változója egyenlő, akkor D értéke nulla.

Legyen $d = D(e_1, \ldots, e_n)$, ahol $[e_1, \ldots, e_n]$ az egységmátrix. Ekkor tetszőleges $v_1, \ldots, v_n \in T^n$ esetén $D(v_1, \ldots, v_n) = d \det[v_1, \ldots, v_n]$. Azaz D a determinánsfüggvény konstansszorosa.

A Freud-könyvben megtalálható a bizonyítás. Mi először $n = 2$-re igazoljuk az állítást.

Bizonyítás

Ha $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és $v_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, akkor $v_1 = ae_1 + be_2$ és $v_2 = ce_1 + de_2$.
A linearitás miatt $D(v_1, v_2) = aD(e_1, v_2) + bD(e_2, v_2)$. A linearitást a második változóban is használva a következőt kapjuk:
$D(v_1, v_2) = acD(e_1, e_1) + adD(e_1, e_2) + bcD(e_2, e_1) + bdD(e_2, e_2)$.
De (2) miatt $D(e_1, e_1) = 0 = D(e_2, e_2)$, másrészt korábban láttuk, hogy D a változók cseréjénél előjelet vált: $D(e_2, e_1) = -D(e_1, e_2)$.
Így $D(v_1, v_2) = acD(e_1, e_2) - bdD(e_1, e_2) = \det[v_1, v_2]d$. □

Az általános esetben $D(v_1, \ldots, v_n)$ egy olyan összegre bomlik, amelynek tagjai $a_{f(1),1} \ldots a_{f(n),n} D(e_{f(1)}, \ldots, e_{f(n)})$ alakúak. Ha f nem permutációja az indexeknek, akkor nullát kapunk. Ha igen akkor f inverzióinak megfelelő cseréket végrehajtva $\mathrm{sg}(f)D(e_1, \ldots, e_n)$ lesz $a_{f(1),1} \ldots a_{f(n),n}$-nel szorozva. Ezért az eredmény $\det[v_1, \ldots, v_n]^T d$. □

A szorzástétel bizonyítása

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor $\det[Mv_1, \ldots, Mv_n] = \det(M) \det[v_1, \ldots, v_n]$. Szemléletesen: *az oszlopok M-mel szorzása* $\det(M)$*-szeresére változtatja a determinánst.*

Valóban, a $D_M(v_1, \ldots, v_n) = \det[Mv_1, \ldots, Mv_n]$ függvényre
$D_M(v_1, \ldots, v_n) = D_M(e_1, \ldots, e_n) \det[v_1, \ldots, v_n]$ teljesül az iménti tétel miatt. De $D_M(e_1, \ldots, e_n) = \det(M)$, mert a mátrixszorzás definíciója miatt Me_i az M mátrix i-edik oszlopa. □

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Ekkor a fenti állítás miatt
$\det[MNe_1, \ldots, MNe_n] = \det(MN) \det[e_1, \ldots, e_n] = \det(MN)$.
Másrészt $\det[MNe_1, \ldots, MNe_n] = \det[M(Ne_1), \ldots, M(Ne_n)]$,
ami $\det(M) \det[Ne_1, \ldots, Ne_n] = \det(M) \det(N)$. □

Az $N = [v_1, \ldots, v_n]$-re is alkalmazhattuk volna az Állítást, de akkor meg kell gondolni, hogy Mv_i az MN szorzatmátrix i-edik oszlopa.

Geometriai háttér

Az eddigiek szemléletesebbek és érthetőbbek, ha a geometriai vonatkozásokat megértjük. Egyszerűség kedvéért a síkon dolgozunk. Ha adottak a $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ helyvektorok, akkor jelölje $D(v_1, v_2)$ a 0, v_1, $v_1 + v_2$, v_2 paralelogramma a területét. Ezt előjelesen értjük, az előjel attól függ, milyen a paralelogramma körüljárása. Ekkor a (2) tulajdonság magától értetődik: elfajuló paralelogramma területe nulla. De (1) is azonnal látszik elemi geometriai úton. Ezért az iménti tétel miatt ez a terület $\det[v_1, v_2]$ konstansszorosa. Mivel az egységnégyzet területe 1, ez a konstans 1. Ezért *a determináns előjeles térfogat* (mérték).
A vektorok M-mel szorzása azt jelenti, hogy egy geometriai transzformációt (például forgatást) alkalmazunk rájuk. Ezért az Állítás jelentése:
a determináns azt mondja meg, hogy egy transzformáció hányszorosára változtatja a térfogatot. Minderről a lineáris algebra keretében lesz szó: a transzformációk és a mátrixok között teremtünk kapcsolatot.

A kifejtési tétel bizonyítása (F1.4.2)
Az $a_{i1}M_{i1}+a_{i2}M_{i2}+\ldots+a_{in}M_{in}$ kifejezés egy számot ad, ami $M=[v_1,\ldots,v_n]$ oszlopainak komponenseiből kiszámítható, jelöljük ezt $D(v_1,\ldots,v_n)$-nel. Ahhoz, hogy ez $\det(M)$-mel egyenlő, az iménti tétel szerint elég belátni az (1) és (2) tulajdonságokat, továbbá, hogy az egységmátrixon az értéke 1.
Utóbbi nyilvánvaló. Ha az első oszlopot megszorozzuk c-vel, akkor a_{i1} is, és $j\geq 2$ esetén M_{ij} is c-vel szorzódik, tehát az összeg is. Hasonló a gondolatmenet összegre bontás esetén is.
Tegyük fel, hogy az j-edik és a k-adik oszlop egyenlő. A többi oszlophoz tartozó aldeterminánsokban van két egyenlő oszlop, azok értéke nulla. Továbbá $a_{ij}=a_{ik}$, tehát elég megmutatni, hogy $M_{ij}=-M_{ik}$.
Feltehető, hogy $j<k$. Az M_{ij} determinánsban az eredeti mátrix k-adik oszlopa szerepel. ha ezt sorban kicseréljük a tőle balra lévő $k-j-1$ oszloppal, akkor M_{ik}-t kapjuk. Ekkor a determináns $(-1)^{k-j-1}$-nel szorzódik. De ezt pont kompenzálja a sakktábla-előjel. $\square$

4. Összefoglaló

A 17. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Előjeles aldetermináns (F1.4.1).

Tételek
A kifejtési (F1.4.2) és a ferde kifejtési (F1.4.3) tétel. Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete (F2.2.2, 2.2.3). Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz (F3.5.2). A Cramer-szabály (F3.2.1). Vandermonde determináns (F1.5.2). A determináns, mint mérték (F9.8.1). Szorzat determinánsa.