1. A permutáció fogalma

A permutáció mint átrendezés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: *n faktoriális*.

Permutálás

alma, szilva, barack

Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. *Átrendezhetjük* így:

barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges. Az átrendezés egy f *függvény*:

$$f(\text{alma}) = \text{barack}, \quad f(\text{szilva}) = \text{alma}, \quad f(\text{barack}) = \text{szilva}.$$

Az $f(x)$ az x helyére tett tárgy. Az f *kölcsönösen egyértelmű*.

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)
Legyen X (rendszerint véges) halmaz. Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz *permutációinak* nevezük. Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$. Mindkét sorban felsoroljuk az X halmaz összes elemét. Az f függvény a felső sor minden elemét az alatta lévőbe képzi.

Kompozíció

Definíció (K2.2.3)
Az f és g függvények *kompozíciója* az az $f \circ g$ függvény, melyre
$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ minden x-re g értelmezési tartományából. Tehát először g-t, azután f-et alkalmazzuk.

<u>Analízisben</u> a neve *összetett függvény*: ha $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$,
akkor $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$ és $(g \circ f)(x) = \sin^2(x) (= (\sin x)^2)$.
Általában $f \circ g \neq g \circ f$ (a kompozíció művelete *nem kommutatív*).

Tétel (K2.2.4. Gyakorlat)
A kompozíció asszociatív: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad f \circ g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Például $(f \circ g)(4) = f\big(g(4)\big) = f(2) = 4$.

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)
Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$. Az x és y *cseréje* az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig *fixen hagyja*, azaz saját magába képzi. Az ilyen permutációkat cserének vagy *transzpozíciónak* hívjuk.

Példa

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1,2) \circ (2,3) : 1 \mapsto 1 \mapsto 2,\ \ 2 \mapsto 3 \mapsto 3,\ \ 3 \mapsto 2 \mapsto 1.$

$$(1,2) \circ (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq (2,3) \circ (1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)
Ezentúl permutációk kompozícióját *szorzásnak* nevezzük, és *egymás mellé írással* jelöljük.

Tétel (K4.2.5)
Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Bizonyítás
Ha a legbaloldali helyen nem az a tárgy van, ami odavaló, akkor odacseréljük azt, ami odavaló. Ezután a balról második helyre cseréljük oda azt, ami odavaló. Az eljárást folytatva minden tárgy a helyére kerül. □

A szükséges cserék száma a legrosszabb esetben is eggyel kevesebb, mint a tárgyak száma.

Példák cserék szorzatára

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ előállítása cserék szorzataként:}$$

$f = (3,5)(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De $f = (1,2)(2,4)(3,5) = (1,5)(1,4)(3,5)(1,2)(3,4)$ is igaz. Azaz f *többféleképpen is felírható* cserék szorzataként.

Tétel (vö. K 155–156. oldal)
Nem fordulhat elő, hogy egy permutáció páratlan sok és páros sok csere szorzataként is felírható.

2. Permutáció előjele

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1)
Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$. Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek *inverzióban állnak.* Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Az alsó sor $\binom{5}{2}$ párja: 24, 25, 23, 21, 45, 43, 41, 53, 51, 31.
Inverzió: $21, 43, 41, 53, 51, 31$. Nem inverzió: $24, 25, 23, 45$. Az inverziók száma tehát 6.
Az S_n egy permutációjának maximum $\binom{n}{2}$ inverziója lehet.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2)
Az f permutáció *páros*, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f *előjele* $+1$. Jelölés: $\text{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció *páratlan*, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f *előjele* -1. Jelölés: $\text{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J, akkor $\text{sg}(f) = (-1)^J$.

Az előjelek szorzástétele (K4.2.9)
Ha $f, g \in S_n$, akkor $\text{sg}(fg) = \text{sg}(f)\text{sg}(g)$. Biz: a következő dián.

Állítás (K4.2.12)
Minden transzpozíció előjele -1. Biz: később.
Ezért a páros permutációk páros sok csere, a páratlan permutációk páratlan sok csere szorzataként kaphatók.

A szorzástétel bizonyítása

Legyen $P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ és $f, g \in S_n$.

Állítás
$P(x_{f(1)}, \ldots, x_{f(n)}) = \text{sg}(f)P(x_1, \ldots, x_n)$.

Bizonyítás: Ha i és j inverzióban áll, azaz $i < j$ de $f(i) > f(j)$, akkor a baloldalon lévő $x_{f(i)} - x_{f(j)}$ helyére írjunk $x_{f(j)} - x_{f(i)}$-t. Ez egy előjelváltással jár, összesen annyiszor váltunk előjelet, ahány inverzió f-ben van. Ezért az előjelek szorzata $\text{sg}(f)$. A cserék után minden baloldalon álló különbségben már a kisebb indexű x_i áll elöl, ezért $P(x_1, \ldots, x_n)$ adódik. $\square$

Ha $y_i := x_{f(i)}$, akkor $x_{(f\circ g)(i)} = y_{g(i)}$, ezért az Állítás miatt
$P(x_{(f\circ g)(1)}, \ldots, x_{(f\circ g)(n)}) = \mathrm{sg}(g)P(y_1, \ldots, y_n)$.
Ismét az Állítás miatt ez $\mathrm{sg}(g)\mathrm{sg}(f)P(x_1, \ldots, x_n)$. Másrészt
$P(x_{(f\circ g)(1)}, \ldots, x_{(f\circ g)(n)}) = \mathrm{sg}(f\circ g)P(x_1, \ldots, x_n)$.
Így $\mathrm{sg}(f\circ g) = \mathrm{sg}(g)\mathrm{sg}(f)$. □

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)
Az *identikus* permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: *id*. Tehát $id(x) = x$. Az f permutáció *inverze* az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g\big(f(x)\big) = x = f\big(g(x)\big)$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges f permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(4) Tetszőleges f permutációra $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$.

Bizonyítás: (1)–(3) nyilvánvaló. A (4) a szorzástételből következik:
$\mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(ff^{-1}) = \mathrm{sg}(id) = 1$.

Csere előjele

Állítás
Az $(1,2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. □

Állítás (K4.2.12)
Általában, az (i,j) csere előjele is -1.

Bizonyítás
Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1,2) \circ g^{-1} = (i,j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$.
Végül ha $k \neq i,j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k) \mapsto k$.
A szorzástétel miatt $\mathrm{sg}\big((i,j)\big) = \mathrm{sg}\big(g \circ (1,2) \circ g^{-1}\big) =$
$= \mathrm{sg}\big(g\big)\mathrm{sg}\big((1,2)\big)\mathrm{sg}\big(g^{-1}\big) = (-1)\mathrm{sg}\big(g\big)\mathrm{sg}\big(g^{-1}\big) = -1$. □

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)
Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás
Elég: *ugyanannyi* páros és páratlan permutáció van. Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Ez az f*-hez* $f \circ (1,2)$*-t* rendel. Mivel $(1,2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel. *Kölcsönösen egyértelmű*, mert *önmagának az inverze*:
$\big(f \circ (1,2)\big) \circ (1,2) = f \circ \big((1,2) \circ (1,2)\big) = f \circ id = f$, azaz ha kétszer csináljuk, visszakapjuk az eredeti f-et. $\square$

Ugyanez $(1,2)$ helyett minden (i,j)-re megy.

Ciklusfelbontás

Definíció (K4.2.17)
Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$.
Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél
$x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$,
és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: *ciklus*, melynek *hossza* k.
Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.

Tétel (4.2.21. és 4.2.22, gyakorlaton)
Ha X véges halmaz, akkor minden S_X-beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.

Példa: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} = (14752)(39)$.

Az előjel kiszámítása

Következmény (K4.2.24)
Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a *páros hosszú* ciklusok száma *páratlan.*

Bizonyítás
HF: $(x_1 \ldots x_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3) \ldots (x_{k-2} x_{k-1})(x_{k-1} x_k)$.
Azaz egy k hosszú ciklus $k-1$ darab transzpozíció szorzata. Használjuk föl, hogy $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. $\square$

Gyakorlat (4.8.14), HF
Ha $f \in S_n$, akkor $f(x_1 \ldots x_k)f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big)$, így ha $g \in S_n$, akkor g és fgf^{-1} ugyanannyi, ugyanolyan hosszú ciklusból áll.

3. Összefoglaló

A 15. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)
Permutáció (K4.2.1), kompozíció (K2.2.3), *id*, inverz (K2.2.11), transzpozíció (K2.4.6). Inverzió (K156. oldal, F1.1.1), permutáció előjele (K4.2.13, F1.1.2). Ciklus, ciklusfelbontás (K4.2.17).

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)
Minden permutáció transzpozíciók szorzata (K4.2.5). A permutációk szorzástétele (K4.2.9). Az inverz permutáció előjele. Transzpozíció előjele (K4.2.12).
A páros permutációk száma (K4.2.16). A ciklusfelbontás létezése és kiszámítása (K4.2.21-22). Az előjel leolvasása a ciklusfelbontásról (K4.2.24).