1. A kétszer kettes determináns

A 2×2-es mátrix determinánsa

Definíció
Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M *determinánsa.*

Lemma
$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás
$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$, $MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}$.
$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db')$.
$\det(M)\det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c')$.
<u>HF:</u> Mindkettő $aa'dd' - ac'db' - cd'ba' + cb'bc'$. □

Amikor nincs inverz

Láttuk korábban
Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

<u>Állítás:</u> Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek *nincs inverze.*

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.
Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N) = \det(E_2)$.
$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ennek determinánsa $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0$.
Ezért $\det(M)$ sem lehet nulla. □

A determináns lineáris

Állítás
$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}$.
$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.
Azaz a determináns az első oszlopában *lineáris* (összegtartó, és skalárszorostartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás
$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix}$ és $\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}$ értéke
$(a + a')d - (b + b')c$, illetve $(ad - bc) + (a'd - b'c)$. Ezek egyenlők.
A skalárszoros-tartás bizonyítása hasonló. □

Oszlopok egyenlősége

Állítás
Ha a mátrix *két oszlopa egyenlő*, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás
$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$ □

Definíció
Az M *felső háromszögmátrix*, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad$, azaz felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A linearitás következménye

Állítás
Ha a mátrix egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás (ez nagyobb méretű determinánsokra is ugyanaz)
Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De $\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$, mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó. Végül $\det[w, w] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.
Ezért $\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w]$. □

Oszlopcsere

Állítás
A két oszlop cseréjénél a determináns *előjelet vált*.

Bizonyítás
$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$

$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$ □

Második bizonyítás (nagyobb méretű determinánsra is)
$\det[w, v] = \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] =$
$= \det[w + v, -w] = \det[v, -w] = -\det[v, w].$ □

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.
A második oszlopból kivonjuk az elsőt.
Az első oszlophoz hozáadjuk a másodikat.
Kiemelünk -1-et a második oszlopból.

A transzponált determinánsa

Állítás
A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás
$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$
$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$ $\square$

Állítás
Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris, *számolás nélkül* következik, hogy a soraiban is az, továbbá hogy sorcserénél is előjelet vált (lásd a következő diát).

Sorcsere

Állítás
Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás
Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix. Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T-ból. Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált, azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$. Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik, azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.
Ezért $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$. $\square$

HF: Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris, továbbá, hogy ha az egyik sorhoz a másik sor skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

2. A háromszor hármas determináns

A megkívánt tulajdonságok

Tétel
3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A Sarrus-szabály

Tétel
Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$
Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály
$$\begin{bmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \underline{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & \underline{a_{32}} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} \\ \underline{a_{31}} & a_{32} & \underline{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & \underline{a_{12}} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára. A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk, és ezek összegéből kivonjuk a három mellékátlóval párhuzamos egyenesen lévő számok szorzatát.

3. Az általános determináns

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6 és F2.2.2–2.2.4)
Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3**-ra**

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Definíció
Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege. A képlet később, *permutációk előjelének* felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).
A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.
A (7) szorzattartási tulajdonságot, valamint az inverz mátrix létezésének (8) kérdését is később vizsgáljuk.

A determináns kiszámítása

Eljárás
Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az *alatta* lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk, melynek determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.

Példa eliminációra

Példa
Karikázás helyett a megfelelő számok *piros* színűek.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$
Az első két oszlopot megcseréljük.
A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.
Az eredmény a főátlóbeli elemek szorzata.

Példa
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$
Az első két oszlopot megcseréljük.
A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.
A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.
HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.
Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.
Az utolsó sor a második sor 2-szerese mínusz az első sor.

4. Összefoglaló

A 14. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
A 2×2-es és 3×3-as determináns.

Tételek (F1.3.1–6. és F2.2.2–4.)
A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa; inverz létezése.