1. Bevezetés

A félév anyaga

- *Számelméleti alapok*
  - Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, prímszámok
  - Kongruenciák, Euler-Fermat-tétel
  - Számelméleti függvények, diofantikus egyenletek
  - Kvadratikus maradékok
- *Komplex számok*
  - Műveletek, kapcsolat a geometriával, gyökvonás
- *Polinomok*
  - A gyökök száma, a gyökök és együtthatók összefüggése
  - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések
- *Lineáris algebra*
  - Lineáris egyenletrendszerek
  - Műveletek vektorokkal és mátrixokkal
  - Determinánsok
- *Absztrakt algebrai alapfogalmak*
  - Csoportok, gyűrűk és testek

Irodalom

- `ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas/faliujsag`
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, videók, ajánlott irodalom
- *K=Kiss Emil: Bevezetés az algebrába*

  `ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas/letoltheto-jegyzetek`
  - Komplex számok, polinomok
  - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)

- *F=Freud Róbert: Lineáris algebra*
  - Az első három félév lineáris algebra anyaga
- *FGy=Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet*
  - Részletes bevezetés a számelmélet alapjaiba
  - Haladó számelméleti témák a későbbi tanulmányokhoz
- Mindhárom könyvben feladatok megoldásokkal a gyakorlathoz

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, ***NEM JEGYZETELNI!***
  - Ez a prezentáció lefedi a normál vizsgakövetelményeket.
  - Nyomtatható változat is letölthető.
  - Hivatkozások a három tankönyvre, ahol magyarázatok vannak.
- *Az anyagot meg is kell érteni!*
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a könyvekben;
  - logikai szabatosság, a matematika nyelvének elsajátítása.
- *Hasznos kiegészítő tanulmányok*
  - Általános programozási kultúra: `C++`, `Unix`, `git`, LaTeX.
  - `SAGE (Wolfram Alpha, MAPLE)`, `Octave (Matlab)`.
  - Mesterséges intelligencia, `Python`.
  - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;
  - közgazdasági ismeretek, mérnöki tudományok.
- Konzultációs gyorssegély: `ewwkiss@gmail.com`

A számonkérés módja

- *A gyakorlati jegy:*
  - Csak három hétnyi hiányzás megengedett.
  - Gyakorlatokon röpdolgozat (memóriasegítő);
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.

- *A vizsgajegy:*
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, három részes:
    * Beugró a definíciók, tételek kimondásából.
    * A megértést ellenőrző kérdések.
    * Opcionális rész a bizonyításokból (ez lehet szóbeli is).
  - Összesen három alkalom; egyre kell eljönni, kivéve ha az nem sikerül.
  - Lehet javítani későbbi vizsgán.

2. Lineáris egyenletrendszerek

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:
$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:
Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni). Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$, azaz $x = 2$.

Ellenőrzés:
$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$
$5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 8$

Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.

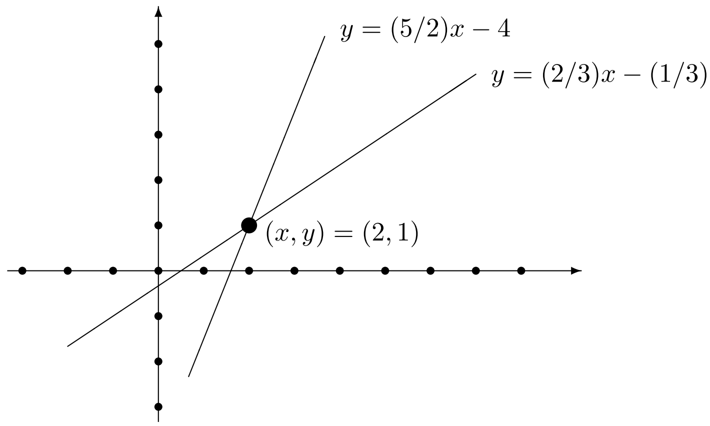
A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) *Nulla* darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) *Egy* darab közös pontja (ha metszők);

(3) *Végtelen sok* közös pontja (ha egyenlők).



Példák
$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Egybeeső egyenesek ($y = x - 1$), végtelen sok megoldás.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer *általános megoldása* az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása, amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa
$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás: $\{(r, r-1) \mid r \text{ tetszőleges szám}\}$.

Probléma
Hogyan lehet megkeresni egy általános egyenletrendszer általános megoldását?

Lineáris egyenletrendszer esetén *Gauss-eliminációval.*

3. Gauss-elimináció

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció
Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. *Lineáris egyenlet*:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)
Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük.
Általános jelölés:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

Itt n egyenlet van és m ismeretlen.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk. A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{array}{ccc} 2x+4y=6 & x+2y=3 & x+2y=3 \\ 3x+2y=5 & 3x+2y=5 & 0x-4y=-4 \end{array}$$

Az első háromszorosát kivonjuk a másodikból. Így $y = 1$.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a *vezéregyes.*

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, *de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.*

(4) Ha ilyen már nincs, akkor *megállunk.* Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer *ellentmondásos*, nincs megoldása. Ez egy *tilos sor.*

(6) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, és a jobb oldali b_j is nulla, akkor ezt a sort *kihúzzuk.*

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, *szabad változónak* nevezzük. A többi ismeretlen a *kötött változó.*

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1. Ezért *a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.*

A megoldások száma
A szabad változóknak tetszőleges értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így ha van szabad változó, akkor a megoldások száma végtelen.

A megoldás akkor *egyértelmű*, ha az egyenletrendszer *nem ellentmondásos*, és *nincs szabad változó.*

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)
Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás
Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop. Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen. □

Fontos: más összefüggés nincs az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között!
Példák: gyakorlaton, mátrixos jelöléssel.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció
Egy lineáris egyenletrendszer *homogén*, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő. *Triviális megoldás*: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény (F3.1.4. Tétel)
Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor *van* nemtriviális megoldás.

Bizonyítás
Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás. De nem is ellentmondásos, mert van (triviális) megoldás. Ezért van legalább még egy megoldás. □

4. Összefoglaló

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek
Gauss-elimináció, a megoldások leolvasása (F3.1.1. Tétel). A megoldások, az ismeretlenek és az egyenletek száma közötti összefüggés (általános és homogén eset: F3.1.2. és F3.1.4. Tétel).