Algebra és számelmélet

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Konzultáció: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

7. előadás

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \; (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) \quad = \quad 0 + 1i$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) \;=\; 0 + 1i \;=\; i$.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) \quad = \quad 0 + 1i \quad = \quad i$.
$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0° + i\sin 0°)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$$

$$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$$
$$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1.$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \; (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned} \cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i. \\ \cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1. \\ \cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) \end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &&= -i.
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &&= -i.\\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) &
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i = i. \\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i = -1. \\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i = -i. \\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) &= 1 + 0i
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &&= -i.\\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) &= 1 + 0i &&= 1.
\end{aligned}$$

A hatodik egységgyökök

Példa

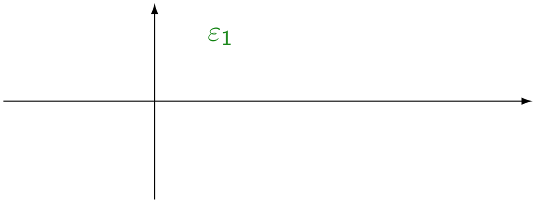
A hatodik egységgyökök a következők.

A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i \sin(\ 2\pi/6)$

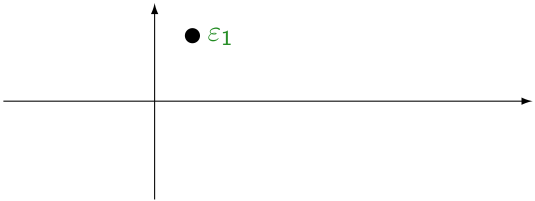


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$.



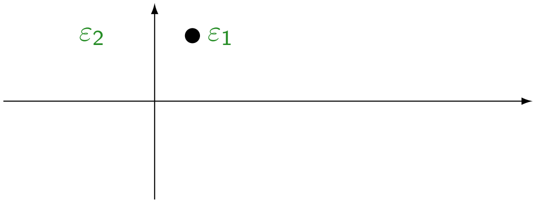
A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \quad 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6)$



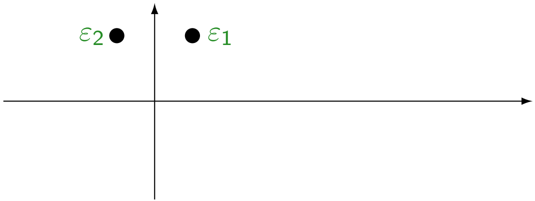
A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

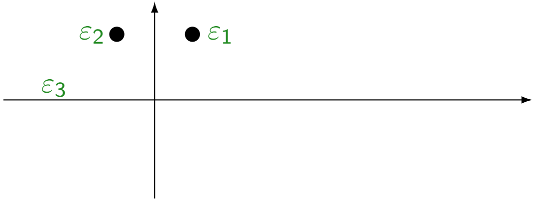
Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

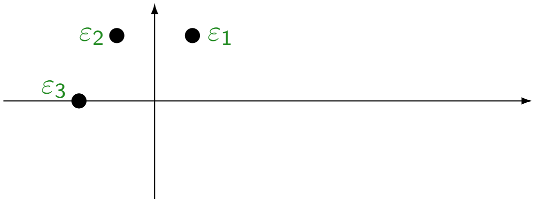
Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$



A hatodik egységgyökök

Példa

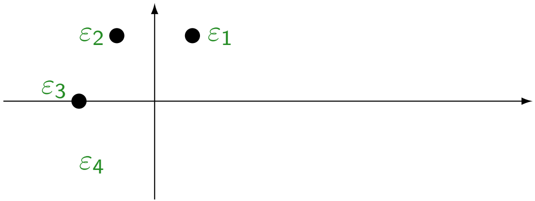
A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

Példa

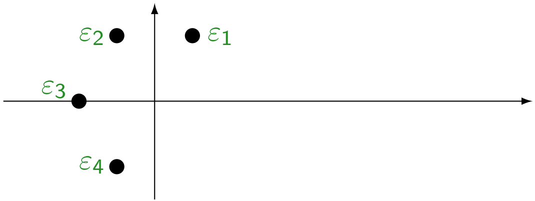
A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

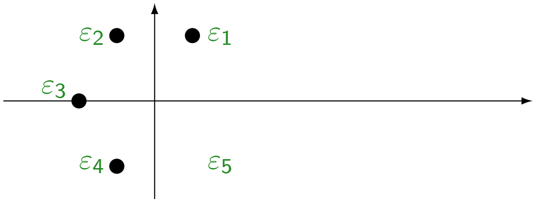
$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

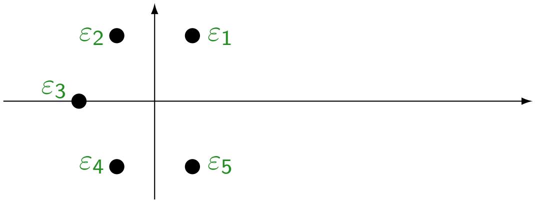
$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

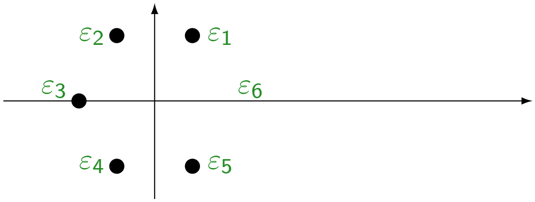
$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6)$

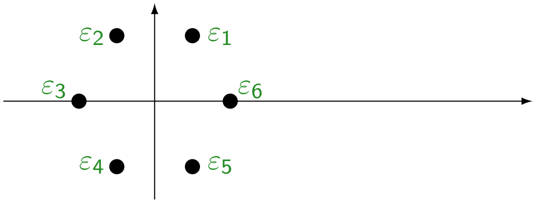


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$$
$$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$$

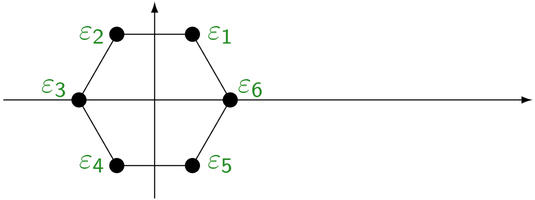


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$$
$$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$$



Szabályos hatszöget alkotnak.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n$

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1,$$

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor, ha w/w_0 egy n-edik egységgyök.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor, ha w/w_0 egy n-edik egységgyök. Ha $w/w_0 = \varepsilon_k$, akkor $w = \varepsilon_k w_0$. $\square$

A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$.

A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak,

A háromszög-egyenlőtlenség

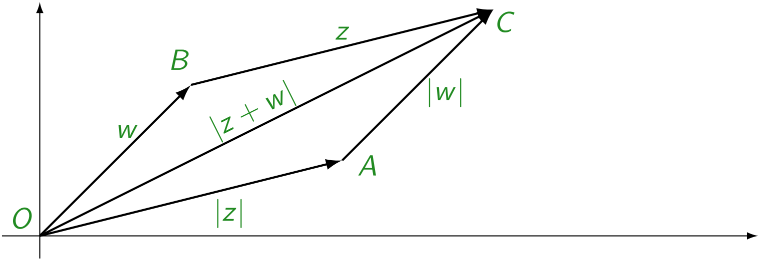
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas valós $r \geq 0$-ra.

A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

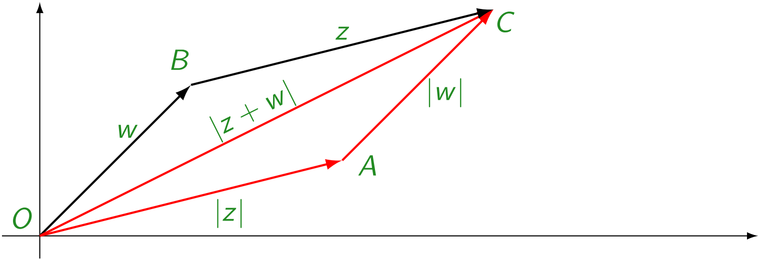
Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas valós $r \geq 0$-ra.



A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z+w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas valós $r \geq 0$-ra.



Bizonyítás

Háromszög-egyenlőtlenség az OAC háromszögre. □

Két pont távolsága

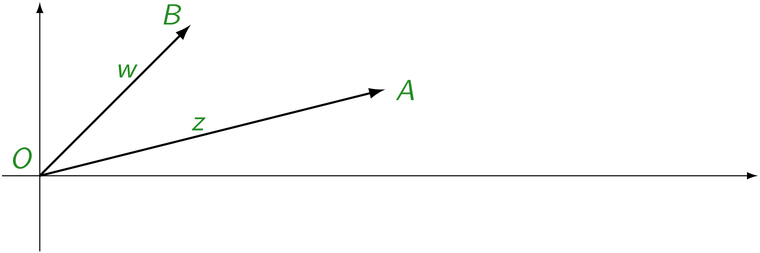
Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.

Két pont távolsága

Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



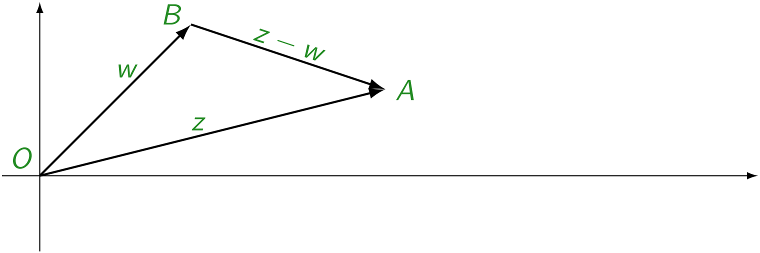
Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$.

Két pont távolsága

Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



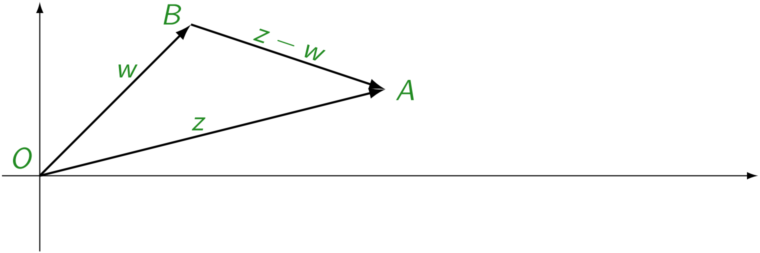
Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$

Két pont távolsága

Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



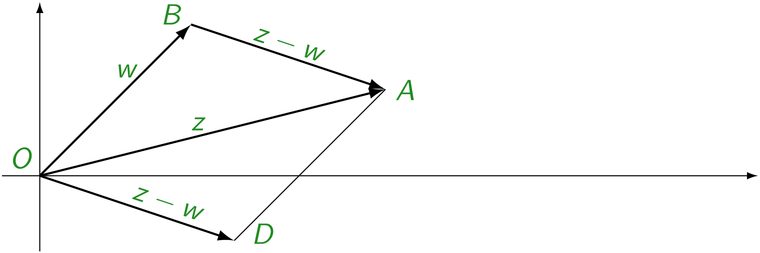
Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$, hiszen $w + (z - w) = z$.

Két pont távolsága

Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$, hiszen $w + (z - w) = z$. De $z - w$ hossza $|z - w|$. $\square$

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás:

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül

Forgatás pont körül

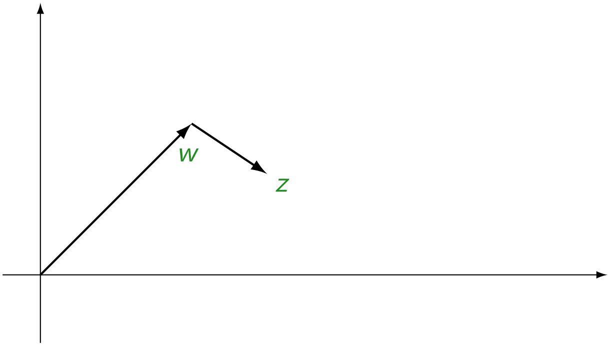
Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.

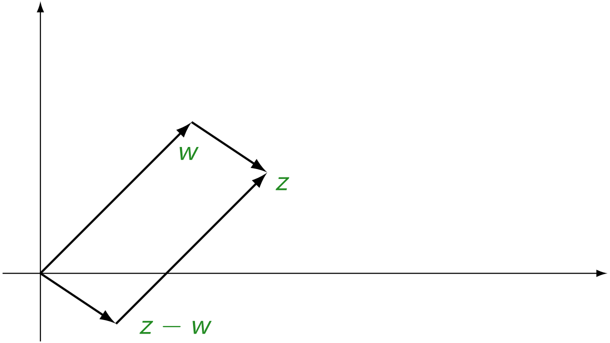


A $\overrightarrow{wz} = z - w$ vektort

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.

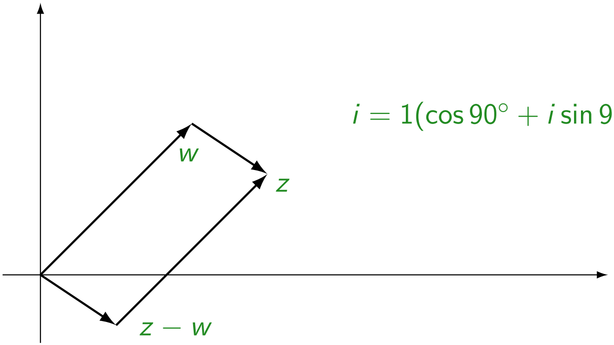


A $\overrightarrow{wz} = z - w$ vektort az origóba toljuk,

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.



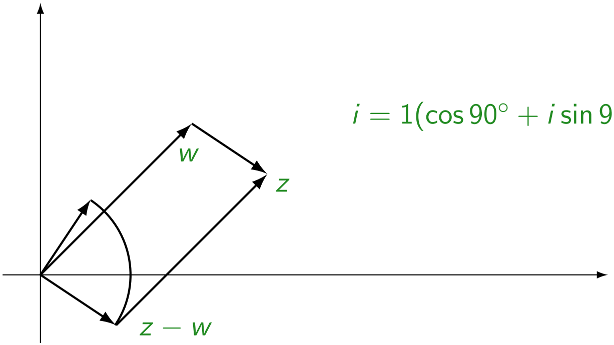
$$i = 1(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$

A $\overrightarrow{wz} = z - w$ vektort az origóba toljuk,

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.



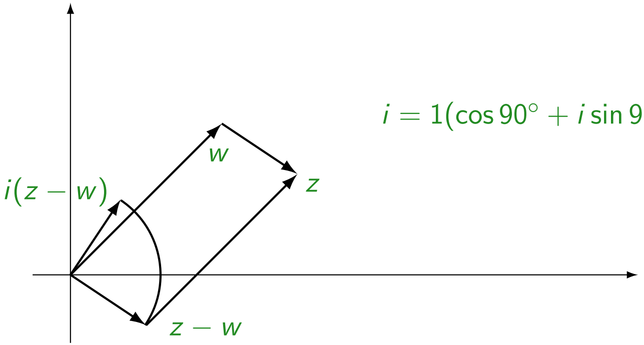
$i = 1(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$

A $\overrightarrow{wz} = z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°),

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.



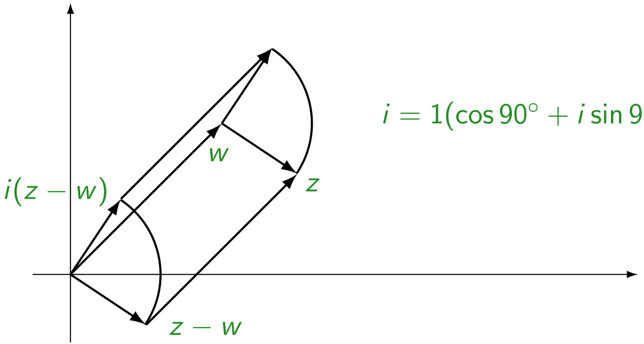
$$i = 1(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$

A $\overrightarrow{wz} = z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°),

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.



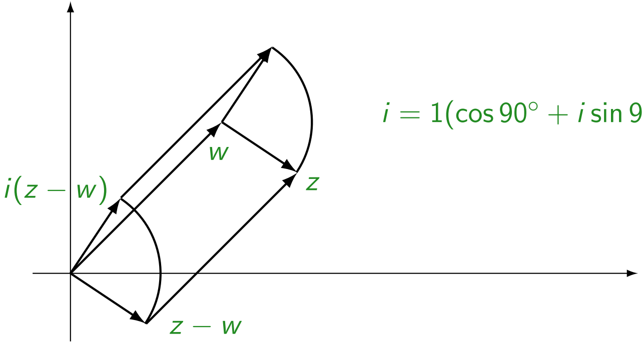
$i = 1(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$

A $\overrightarrow{wz} = z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk,

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.



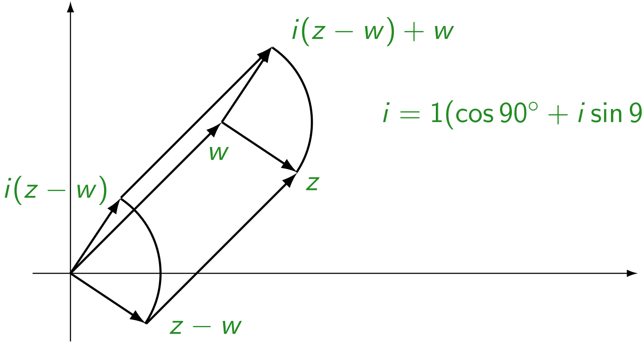
$i = 1(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$

A $\overrightarrow{wz} = z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk, azaz w-t hozzáadunk.

Forgatás pont körül

Mi a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

K1.4.5: Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal szorzás forgatva nyújtás: α szöggel forgat az origó körül és r-szeresére nyújt az origóból.



$$i = 1(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$

A $\overrightarrow{wz} = z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk, azaz w-t hozzáadunk.

Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

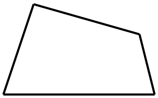
Feladat (K1.4.12.)

Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.

Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

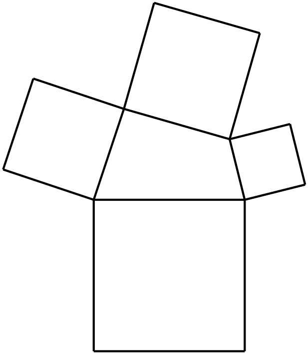
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

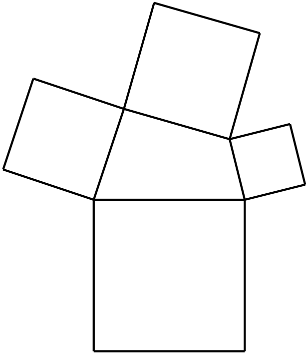
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

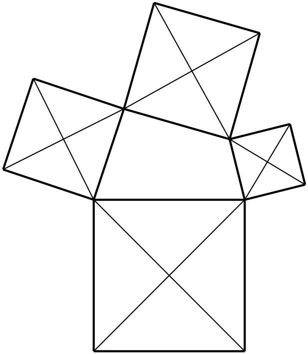
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

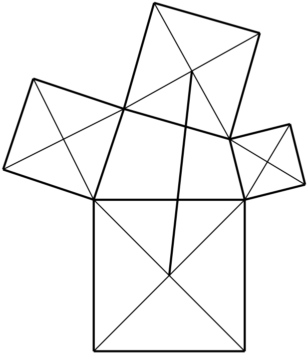
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

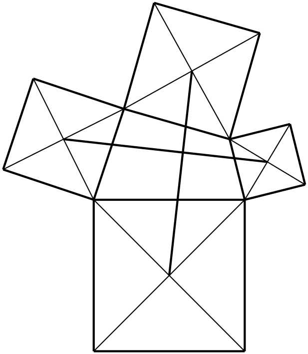
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

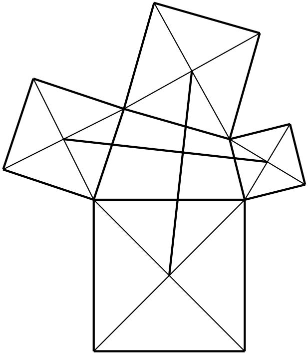
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

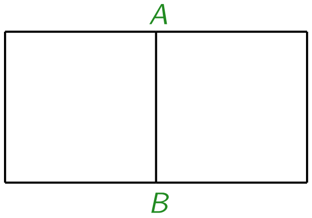
Feladat (K1.4.12.)

Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.
Igazoljuk, hogy e két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.



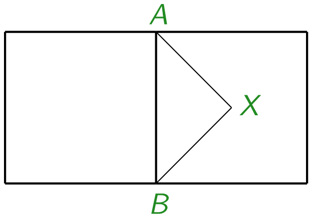
Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



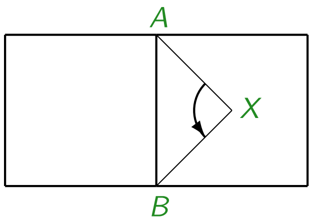
Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



Négyzet középpontja

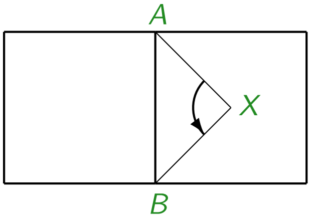
Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

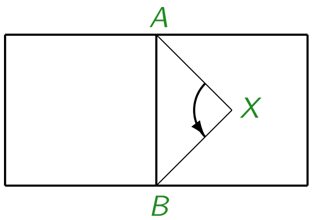


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

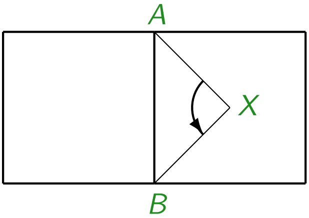


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

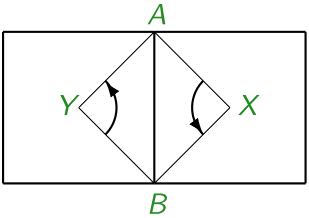


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

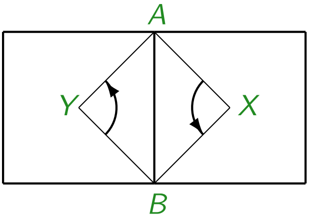


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

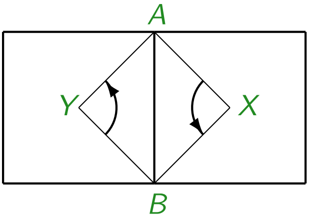


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.
Így $A = i(B-Y)+Y$.

Négyzet középpontja

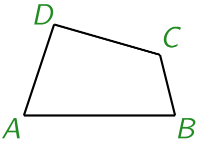
Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



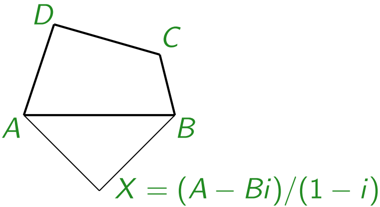
Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.
Így $A = i(B-Y)+Y$. Innen $Y = (A-Bi)/(1-i)$.

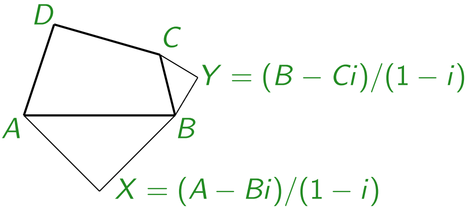
A négyszöges feladat megoldása



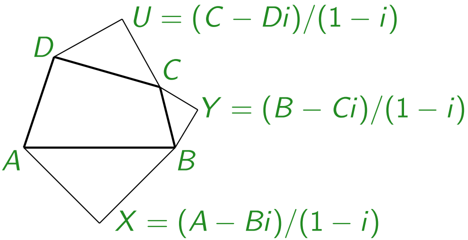
A négyszöges feladat megoldása



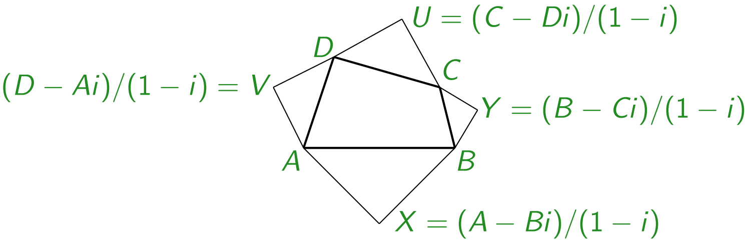
A négyszöges feladat megoldása



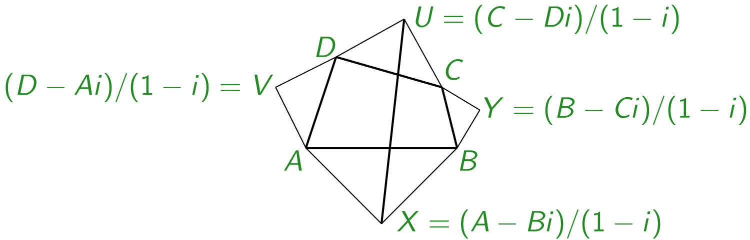
A négyszöges feladat megoldása



A négyszöges feladat megoldása

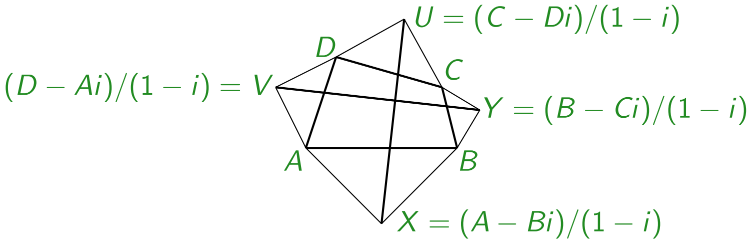


A négyszöges feladat megoldása



$$\overrightarrow{XU} = U - X = \frac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$$

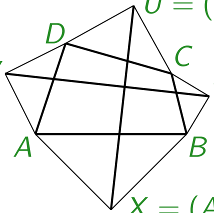
A négyszöges feladat megoldása



$$\overrightarrow{XU} = U - X = \frac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$$

$$\overrightarrow{YV} = V - Y = \frac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big).$$

A négyszöges feladat megoldása

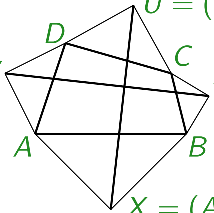


$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$

$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big).$ De

$i\big((C - Di) - (A - Bi)\big) = \big((D - Ai) - (B - Ci)\big).$

A négyszöges feladat megoldása



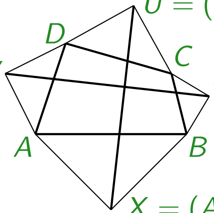
$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$

$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big).$ De

$i\big((C - Di) - (A - Bi)\big) = \big((D - Ai) - (B - Ci)\big).$

Azaz $i(U - X) = V - Y$,

A négyszöges feladat megoldása



$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big)$.

$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big)$. De

$i\big((C - Di) - (A - Bi)\big) = \big((D - Ai) - (B - Ci)\big)$.

Azaz $i(U - X) = V - Y$, így $\overrightarrow{XU}$ $+90^\circ$-os elforgatottja $\overrightarrow{YV}$. $\square$

Az algebra alaptétele

Gyökvonás létezése: az $x^n - w$ polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Az algebra alaptétele

Gyökvonás létezése: az $x^n - w$ polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Az algebra alaptétele

Gyökvonás létezése: az $x^n - w$ polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.

Az algebra alaptétele

Gyökvonás létezése: az $x^n - w$ polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.

Az algebra alaptétele

Gyökvonás létezése: az $x^n - w$ polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.

Az algebra alaptétele

Gyökvonás létezése: az $x^n - w$ polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak
van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.

Felhasznált segédtétel:

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Az algebra alaptétele

Gyökvonás létezése: az $x^n - w$ polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.

Felhasznált segédtétel:

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis Bolzano-tételével,

Az algebra alaptétele

Gyökvonás létezése: az $x^n - w$ polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak
van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.

Felhasznált segédtétel:

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis Bolzano-tételével, de következik az algebra alaptételéből is (később).

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).

Tételek

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3).

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).

Tételek

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3).
Két pont távolsága (K1.4.7).

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).

Tételek

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3).
Két pont távolsága (K1.4.7).
Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra).

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).

Tételek

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3).
Két pont távolsága (K1.4.7).
Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).