Algebra és számelmélet

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Konzultáció: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

5. előadás

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n+3=1$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Bizonyítás

Ha n természetes szám, akkor $n + 3 \geq 3$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Bizonyítás

Ha $r \geq 0$, akkor $r^2 \geq 0$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n+3=1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2=-1$.

Bizonyítás

Ha $r \geq 0$, akkor $r^2 \geq 0$.
Ha $r < 0$, akkor is $r^2 = (-r)^2 \geq 0$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Ezért be fogjuk vezetni a komplex számokat,
amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Ezért be fogjuk vezetni a komplex számokat,
amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

- egyenletek megoldásakor;

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Ezért be fogjuk vezetni a komplex számokat,
amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

- egyenletek megoldásakor;
- geometriai alakzatok, valós függvények megértésekor;

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Ezért be fogjuk vezetni a komplex számokat,
amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

- egyenletek megoldásakor;
- geometriai alakzatok, valós függvények megértésekor;
- a fizikában (folyadékok áramlása, kvantummechanika, a téridő szerkezete).

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot" jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot" jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1 + i)^2$?

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i =$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$$(1+i)(1+i) = 1\cdot 1 + 1\cdot i + i\cdot 1 + i\cdot i = 1 + i + i - 1$$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \ = 2i.$$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \;= 2i$.

Csak ez lehet az eredmény.

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \ = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) =$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \ = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) =$ $\qquad (bi)(di) = -bd;$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot'' jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \ = 2i.$$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \; = 2i$.

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a+bi) + (c+di) =$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot" jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \ = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) +$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \;= 2i$.

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1\cdot 1 + 1\cdot i + i\cdot 1 + i\cdot i = 1 + i + i - 1 \ = 2i$.

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.

Az i-vel úgy számolunk, mintha ismeretlen lenne,

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1\cdot 1 + 1\cdot i + i\cdot 1 + i\cdot i = 1 + i + i - 1 \ = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.

Az i-vel úgy számolunk, mintha ismeretlen lenne,
de i^2 helyett -1-et írunk.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket,
ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a+bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z=a+bi$ valós része $\mathrm{Re}(z)=a$.
A $z=a+bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z)=b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

Az $a+bi$ csak akkor egyenlő $c+di$-vel, ha $a=c$ és $b=d$,

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$.
A bi alakú számok tisztán képzetesek

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$.
A bi alakú számok tisztán képzetesek (valós részük nulla).

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, NEM bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$.
A bi alakú számok tisztán képzetesek (valós részük nulla).

Az i az imaginárius (képzetes) szó rövidítése.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.

A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z\in\mathbb{C}$ **ellentettje** w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z=a+bi$ (egyetlen) ellentettje

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

A $z \in \mathbb{C}$ **ellentettje** w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z=a+bi$ (egyetlen) ellentettje $w=(-a)+$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z=a+bi$ (egyetlen) ellentettje $w=(-a)+(-b)i$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z=a+bi$ (egyetlen) ellentettje $w=(-a)+(-b)i$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $u-z=$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z=a+bi$ (egyetlen) ellentettje $w=(-a)+(-b)i$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $u-z=u+(-z)$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciprok**a u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás:

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$,

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

Osztás, reciprok

A w komplex szám reciproka u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az osztás a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1 + i)(1 - i) =$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \frac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\frac{z}{w} = z\frac{1}{w}$, mert $z\frac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 =$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \frac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\frac{z}{w} = z\frac{1}{w}$, mert $z\frac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) =$

Osztás, reciprok

A w komplex szám reciproka u, ha $wu = 1$. Jele $u = \frac{1}{w}$.

Az osztás a reciprokkal való szorzás: $\frac{z}{w} = z\frac{1}{w}$, mert $z\frac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2.$

Osztás, reciprok

A w komplex szám reciproka u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az osztás a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Tehát

$$(1+i)\frac{1-i}{2} = 1$$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \frac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\frac{z}{w} = z\frac{1}{w}$, mert $z\frac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Tehát

$$(1+i)\frac{1-i}{2} = 1\,, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} =$$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \frac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\frac{z}{w} = z\frac{1}{w}$, mert $z\frac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Tehát

$$(1+i)\frac{1-i}{2} = 1\,, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM $a^2 - b^2$!

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a + bi} =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a+bi$ reciprokának kiszámításához $a-bi$-vel jó bővíteni.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-(-b^2) = a^2+b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM a^2-b^2!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\,.$$

A reciprok kiszámítása

Az $a+bi$ reciprokának kiszámításához $a-bi$-vel jó bővíteni.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\,.$$

Ez értelmes, ha $a+bi \neq 0$,

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i\,.$$

Ez értelmes, ha $a + bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla,

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

Ez értelmes, ha $a + bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla, és ezért $a^2 + b^2 > 0$ (azaz nem nulla).

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \,.$$

Ez értelmes, ha $a + bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla, és ezért $a^2 + b^2 > 0$ (azaz nem nulla).

Következmény (K1.3.6)

Minden nem nulla komplex számnak van reciproka

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény NEM $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i\,.$$

Ez értelmes, ha $a + bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla, és ezért $a^2 + b^2 > 0$ (azaz nem nulla).

Következmény (K1.3.6)

Minden nem nulla komplex számnak van reciproka, ezért minden nem nulla komplex számmal lehet osztani.

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.

A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés (K1.3.8)

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$.

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés (K1.3.8)

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1+i| = \sqrt{2}$, ami nem $1+i$ és nem $-(1+i)$.

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés (K1.3.8)

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$.
Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$,

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés (K1.3.8)

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$.
Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$, tehát ugyanaz, mint az abszolút érték „régi” értelme.

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés (K1.3.8)

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$.
Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$, tehát ugyanaz, mint az abszolút érték „régi" értelme.

Nem használhatunk egyenlőtlenségeket nem valós komplex számok között.

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés (K1.3.8)

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$.
Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$,
tehát ugyanaz, mint az abszolút érték „régi" értelme.

Nem használhatunk egyenlőtlenségeket nem valós komplex számok között. Értelmetlen olyat leírni, hogy $i > 0$ vagy $i < 0$.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z + w} =$

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + (b+d)i} =$

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor
$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i.$

$\overline{z} + \overline{w} =$

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i.$

$\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (c - di) =$

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$.

$\overline{z} + \overline{w} = (a-bi)+(c-di) = (a+c)-(b+d)i$.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor
$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i$.
$\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (c - di) = (a+c) - (b+d)i$.
Ezek tényleg egyenlők. $\square$

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$|zw|^2$

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$|zw|^2$

Az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$|zw|^2 = zw\,\overline{zw}$

Az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$|zw|^2 = zw\,\overline{zw}$

Az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt.
Felhasználjuk, hogy a konjugálás szorzattartó.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} =$

Az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt.
Felhasználjuk, hogy a konjugálás szorzattartó.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} =$

Az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt.
Felhasználjuk, hogy a konjugálás szorzattartó.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 .$$

Az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt.
Felhasználjuk, hogy a konjugálás szorzattartó.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$.

Mivel $|zw| \geq 0$ és $|z||w| \geq 0$, négyzetgyököt vonhatunk. $\square$

Az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt.

Felhasználjuk, hogy a konjugálás szorzattartó.

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a nullelem).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x+y = y+x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x+0 = 0+x = x$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 egységelem).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 egységelem).

(8) Minden nem nulla x-nek van reciproka.

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 egységelem).

(8) Minden nem nulla x-nek van reciproka.

(9) $(x + y)z = xz + yz$ (disztributivitás).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x+y = y+x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x+0 = 0+x = x$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 egységelem).

(8) Minden nem nulla x-nek van reciproka.

(9) $(x+y)z = xz + yz$ (disztributivitás).

Mintabizonyítás: K1.3.4. Gyakorlat.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes:

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$u(zw)$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$(uz)w = u(zw)$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$1 \cdot w = (uz)w = u(zw)$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw)$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0\,.$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)

A komplex számok szorzása nullosztómentes: két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0\,.$$

Ezzel elvégeztük a K1.3. szakaszt.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K1.3. és 1.4. szakasz)

Komplex szám, valós és képzetes rész, tisztán képzetes szám,

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K1.3. és 1.4. szakasz)

Komplex szám, valós és képzetes rész, tisztán képzetes szám, összeadás, kivonás, szorzás, ellentett (K1.3.2).

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K1.3. és 1.4. szakasz)

Komplex szám, valós és képzetes rész, tisztán képzetes szám, összeadás, kivonás, szorzás, ellentett (K1.3.2).
Reciprok, osztás (K1.3.6),

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K1.3. és 1.4. szakasz)

Komplex szám, valós és képzetes rész, tisztán képzetes szám, összeadás, kivonás, szorzás, ellentett (K1.3.2).
Reciprok, osztás (K1.3.6), konjugált, abszolút érték (K1.3.9).

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K1.3. és 1.4. szakasz)

Komplex szám, valós és képzetes rész, tisztán képzetes szám, összeadás, kivonás, szorzás, ellentett (K1.3.2).
Reciprok, osztás (K1.3.6), konjugált, abszolút érték (K1.3.9).

Tételek

Műveleti tulajdonságok (K1.3.3),

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K1.3. és 1.4. szakasz)

Komplex szám, valós és képzetes rész, tisztán képzetes szám, összeadás, kivonás, szorzás, ellentett (K1.3.2).
Reciprok, osztás (K1.3.6), konjugált, abszolút érték (K1.3.9).

Tételek

Műveleti tulajdonságok (K1.3.3), nullosztómentesség (K1.3.7).

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K1.3. és 1.4. szakasz)

Komplex szám, valós és képzetes rész, tisztán képzetes szám, összeadás, kivonás, szorzás, ellentett (K1.3.2).
Reciprok, osztás (K1.3.6), konjugált, abszolút érték (K1.3.9).

Tételek

Műveleti tulajdonságok (K1.3.3), nullosztómentesség (K1.3.7).
A konjugált és az abszolút érték tulajdonságai (K1.3.10).