Algebra és számelmélet

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Konzultáció: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

30. előadás

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$.

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?

Zhang, Tao: Végtelen sok p-re van prím p és $p + 246$ között.

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?
Zhang, Tao: Végtelen sok p-re van prím p és $p+246$ között.
Viggo Brun: Az ikerprímek reciprokösszege véges (a prímeké nem).

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?
Zhang, Tao: Végtelen sok p-re van prím p és $p + 246$ között.
Viggo Brun: Az ikerprímek reciprokösszege véges (a prímeké nem).

Goldbach-sejtés

Előáll-e minden 2-nél nagyobb páros szám két prím összegeként?

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?
Zhang, Tao: Végtelen sok p-re van prím p és $p+246$ között.
Viggo Brun: Az ikerprímek reciproksösszege véges (a prímeké nem).

Goldbach-sejtés

Előáll-e minden 2-nél nagyobb páros szám két prím összegeként?

Vinogradov: Minden elég nagy páratlan szám három prím összege.

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?
Zhang, Tao: Végtelen sok p-re van prím p és $p+246$ között.
Viggo Brun: Az ikerprímek reciprokösszege véges (a prímeké nem).

Goldbach-sejtés

Előáll-e minden 2-nél nagyobb páros szám két prím összegeként?

Vinogradov: Minden elég nagy páratlan szám három prím összege.

Van-e végtelen sok prím az alábbi sorozatokban?
n^2+1,

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?
Zhang, Tao: Végtelen sok p-re van prím p és $p+246$ között.
Viggo Brun: Az ikerprímek reciprokösszege véges (a prímeké nem).

Goldbach-sejtés

Előáll-e minden 2-nél nagyobb páros szám két prím összegeként?

Vinogradov: Minden elég nagy páratlan szám három prím összege.

Van-e végtelen sok prím az alábbi sorozatokban?
n^2+1, $1111\ldots1$,

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?
Zhang, Tao: Végtelen sok p-re van prím p és $p + 246$ között.
Viggo Brun: Az ikerprímek reciprokösszege véges (a prímeké nem).

Goldbach-sejtés

Előáll-e minden 2-nél nagyobb páros szám két prím összegeként?

Vinogradov: Minden elég nagy páratlan szám három prím összege.

Van-e végtelen sok prím az alábbi sorozatokban?
$n^2 + 1$, $1111\ldots1$, $3333\ldots31$,

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?
Zhang, Tao: Végtelen sok p-re van prím p és $p+246$ között.
Viggo Brun: Az ikerprímek reciprokösszege véges (a prímeké nem).

Goldbach-sejtés

Előáll-e minden 2-nél nagyobb páros szám két prím összegeként?

Vinogradov: Minden elég nagy páratlan szám három prím összege.

Van-e végtelen sok prím az alábbi sorozatokban?
n^2+1, $1111\ldots1$, $3333\ldots31$, Fibonacci-sorozat.

Klasszikus megoldatlan problémák (FGy5.1)

Ikerprímek

$(p, p+2)$ párok, ahol mindkettő prím. Pl. $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$.

Van-e végtelen sok ikerprím-pár?
Zhang, Tao: Végtelen sok p-re van prím p és $p+246$ között.
Viggo Brun: Az ikerprímek reciprokösszege véges (a prímeké nem).

Goldbach-sejtés

Előáll-e minden 2-nél nagyobb páros szám két prím összegeként?

Vinogradov: Minden elég nagy páratlan szám három prím összege.

Van-e végtelen sok prím az alábbi sorozatokban?
n^2+1, $1111\ldots1$, $3333\ldots31$, Fibonacci-sorozat.

Green, Tao: Van bármilyen hosszú számtani sorozat prímszámokból.

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím,

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \leq k \leq N+1$, mert k-val osztható.

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \leq k \leq N+1$, mert k-val osztható.
Így a legnagyobb $p \leq (N+1)!+1$ prím megfelel az első feltételnek.

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \leq k \leq N+1$, mert k-val osztható.
Így a legnagyobb $p \leq (N+1)!+1$ prím megfelel az első feltételnek.
Vegyünk $N < p_1, p_2, \dots, p_{2N}$ különböző prímeket, és tekintsük az $x \equiv i \ (p_i)$, $x \equiv -i \ (p_{N+i})$ szimultán kongruenciarendszert

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \leq k \leq N+1$, mert k-val osztható.
Így a legnagyobb $p \leq (N+1)!+1$ prím megfelel az első feltételnek.
Vegyünk $N < p_1, p_2, \ldots, p_{2N}$ különböző prímeket, és tekintsük az $x \equiv i \ (p_i)$, $x \equiv -i \ (p_{N+i})$ szimultán kongruenciarendszert ($1 \leq i \leq N$, tehát $2N$ kongruenciából áll).

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \le k \le N+1$, mert k-val osztható. Így a legnagyobb $p \le (N+1)!+1$ prím megfelel az első feltételnek. Vegyünk $N < p_1, p_2, \ldots, p_{2N}$ különböző prímeket, és tekintsük az $x \equiv i \ (p_i)$, $x \equiv -i \ (p_{N+i})$ szimultán kongruenciarendszert ($1 \le i \le N$, tehát $2N$ kongruenciából áll). A kínai maradéktétel szerint ennek van megoldása,

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \leq k \leq N+1$, mert k-val osztható. Így a legnagyobb $p \leq (N+1)!+1$ prím megfelel az első feltételnek. Vegyünk $N < p_1, p_2, \dots, p_{2N}$ különböző prímeket, és tekintsük az $x \equiv i \ (p_i)$, $x \equiv -i \ (p_{N+i})$ szimultán kongruenciarendszert ($1 \leq i \leq N$, tehát $2N$ kongruenciából áll). A kínai maradéktétel szerint ennek van megoldása, ami egy maradékosztály (tehát számtani sorozat) a $d = p_1 \dots p_{2N}$ modulusra nézve.

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \leq k \leq N+1$, mert k-val osztható. Így a legnagyobb $p \leq (N+1)!+1$ prím megfelel az első feltételnek. Vegyünk $N < p_1, p_2, \ldots, p_{2N}$ különböző prímeket, és tekintsük az $x \equiv i \ (p_i)$, $x \equiv -i \ (p_{N+i})$ szimultán kongruenciarendszert ($1 \leq i \leq N$, tehát $2N$ kongruenciából áll). A kínai maradéktétel szerint ennek van megoldása, ami egy maradékosztály (tehát számtani sorozat) a $d = p_1 \ldots p_{2N}$ modulusra nézve. Nyilván $(d, \pm i) = 1$,

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \le k \le N+1$, mert k-val osztható. Így a legnagyobb $p \le (N+1)!+1$ prím megfelel az első feltételnek. Vegyünk $N < p_1, p_2, \ldots, p_{2N}$ különböző prímeket, és tekintsük az $x \equiv i\ (p_i)$, $x \equiv -i\ (p_{N+i})$ szimultán kongruenciarendszert ($1 \le i \le N$, tehát $2N$ kongruenciából áll). A kínai maradéktétel szerint ennek van megoldása, ami egy maradékosztály (tehát számtani sorozat) a $d = p_1 \ldots p_{2N}$ modulusra nézve. Nyilván $(d, \pm i) = 1$, hiszen $p_i > N \ge i$.

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \leq k \leq N+1$, mert k-val osztható. Így a legnagyobb $p \leq (N+1)!+1$ prím megfelel az első feltételnek. Vegyünk $N < p_1, p_2, \ldots, p_{2N}$ különböző prímeket, és tekintsük az $x \equiv i \ (p_i)$, $x \equiv -i \ (p_{N+i})$ szimultán kongruenciarendszert ($1 \leq i \leq N$, tehát $2N$ kongruenciából áll). A kínai maradéktétel szerint ennek van megoldása, ami egy maradékosztály (tehát számtani sorozat) a $d = p_1 \ldots p_{2N}$ modulusra nézve. Nyilván $(d, \pm i) = 1$, hiszen $p_i > N \geq i$. Ezért Dirichlet tétele miatt a megoldások között van p prím,

Hézagtétel

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2)

Minden N-re van olyan p prím, hogy p és $p+N$ között már nincs prím, sőt olyan is, amelyre $p-N$ és p között sincs (izolált prím).

Bizonyítás

$(N+1)!+k$ összetett, ha $2 \leq k \leq N+1$, mert k-val osztható. Így a legnagyobb $p \leq (N+1)!+1$ prím megfelel az első feltételnek. Vegyünk $N < p_1, p_2, \ldots, p_{2N}$ különböző prímeket, és tekintsük az $x \equiv i \ (p_i)$, $x \equiv -i \ (p_{N+i})$ szimultán kongruenciarendszert ($1 \leq i \leq N$, tehát $2N$ kongruenciából áll). A kínai maradéktétel szerint ennek van megoldása, ami egy maradékosztály (tehát számtani sorozat) a $d = p_1 \ldots p_{2N}$ modulusra nézve. Nyilván $(d, \pm i) = 1$, hiszen $p_i > N \geq i$. Ezért Dirichlet tétele miatt a megoldások között van p prím, ami nyilván izolált. $\square$

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.

Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek,
ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.
Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények **aszimptotikusan egyenlőek**, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.

Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.

A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.

Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.

A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.
Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.
A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.
Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.

Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.

A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$. (Pl. $p_{10} = 29$.)

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.

Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.

A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$. (Pl. $p_{10} = 29$.)

Csebisev tétele: n és $2n$ között mindig van prímszám.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.
Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.
A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.
Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$. (Pl. $p_{10} = 29$.)
Csebisev tétele: n és $2n$ között mindig van prímszám.
$\sum_{p \leq n,\ p \text{ prím}} \frac{1}{p} \sim \log \log n$,

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.

Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.

A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$. (Pl. $p_{10} = 29$.)

Csebisev tétele: n és $2n$ között mindig van prímszám.

$\sum_{p \leq n,\ p \text{ prím}} \frac{1}{p} \sim \log \log n$, sőt a két szám eltérése korlátos.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.

Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.

A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$. (Pl. $p_{10} = 29$.)

Csebisev tétele: n és $2n$ között mindig van prímszám.

$\sum_{p \leq n,\ p \text{ prím}} \frac{1}{p} \sim \log \log n$, sőt a két szám eltérése korlátos.

Speciálisan a prímek reciprokösszege végtelen.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.
Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.
A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.
Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$. (Pl. $p_{10} = 29$.)
Csebisev tétele: n és $2n$ között mindig van prímszám.
$\sum_{p \le n,\ p \text{ prím}} \frac{1}{p} \sim \log \log n$, sőt a két szám eltérése korlátos.
Speciálisan a prímek reciprokösszege végtelen.
$P_n = \prod_{p \le n,\ p \text{ prím}} p < 4^n$,

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.
Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.
A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.
Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$. (Pl. $p_{10} = 29$.)
Csebisev tétele: n és $2n$ között mindig van prímszám.
$\sum_{p \le n,\ p \text{ prím}} \frac{1}{p} \sim \log\log n$, sőt a két szám eltérése korlátos.
Speciálisan a prímek reciprokösszege végtelen.
$P_n = \prod_{p \le n,\ p \text{ prím}} p < 4^n$, sőt $\log P_n \sim n$, tehát P_n „kb.” e^n.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.
Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.
A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.
Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$. (Pl. $p_{10} = 29$.)
Csebisev tétele: n és $2n$ között mindig van prímszám.
$\sum_{p \leq n,\ p \text{ prím}} \frac{1}{p} \sim \log \log n$, sőt a két szám eltérése korlátos.
Speciálisan a prímek reciprokösszege végtelen.
$P_n = \prod_{p \leq n,\ p \text{ prím}} p < 4^n$, sőt $\log P_n \sim n$, tehát P_n „kb.” e^n.

A részletes bizonyítások jórészt megtalálhatók a FGy-könyvben.

A prímek nagysága

Az f és g valós függvények aszimptotikusan egyenlőek, ha $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ ha $x \to \infty$. Jele $f \sim g$.

Az x-nél nem nagyobb (pozitív) prímek száma $\pi(x)$. Pl. $\pi(20) = 8$.

A logaritmus mindig természetes (vagyis e alapú).

Tétel (FGy5.4.1, 5.4.2, 5.4.5, 5.5.3, 5.6.2, F5.4.4)

Nagy prímszámtétel: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$. (Pl. $p_{10} = 29$.)

Csebisev tétele: n és $2n$ között mindig van prímszám.

$\sum_{p \leq n,\ p \text{ prím}} \frac{1}{p} \sim \log \log n$, sőt a két szám eltérése korlátos.

Speciálisan a prímek reciprokösszege végtelen.

$P_n = \prod_{p \leq n,\ p \text{ prím}} p < 4^n$, sőt $\log P_n \sim n$, tehát P_n „kb.” e^n.

A részletes bizonyítások jórészt megtalálhatók a FGy-könyvben. Most e tételekhez bizonyításvázlatokat, megjegyzéseket fűzünk.

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$.

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens, $s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens, $s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$,

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens,
$s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $1/n^s$
a jobb oldali szorzat beszorzásakor pontosan egyszer jelenik meg:

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens, $s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $1/n^s$ a jobb oldali szorzat beszorzásakor pontosan egyszer jelenik meg: amikor $R_{p_i}(s)$-ből $1/p_i^{\alpha_i s}$-et vesszük,

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens,
$s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $1/n^s$
a jobb oldali szorzat beszorzásakor pontosan egyszer jelenik meg:
amikor $R_{p_i}(s)$-ből $1/p_i^{\alpha_i s}$-et vesszük, a többi tényezőből pedig 1-et.

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens, $s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $1/n^s$ a jobb oldali szorzat beszorzásakor pontosan egyszer jelenik meg: amikor $R_{p_i}(s)$-ből $1/p_i^{\alpha_i s}$-et vesszük, a többi tényezőből pedig 1-et. (Azok a szorzatok nullával egyenlők, ahol végtelen sok $R_p(s)$-ből nem 1-et veszünk ki).

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens, $s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $1/n^s$ a jobb oldali szorzat beszorzásakor pontosan egyszer jelenik meg: amikor $R_{p_i}(s)$-ből $1/p_i^{\alpha_i s}$-et vesszük, a többi tényezőből pedig 1-et. (Azok a szorzatok nullával egyenlők, ahol végtelen sok $R_p(s)$-ből nem 1-et veszünk ki). Az s kitevőre a konvergencia miatt van szükség.

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens, $s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $1/n^s$ a jobb oldali szorzat beszorzásakor pontosan egyszer jelenik meg: amikor $R_{p_i}(s)$-ből $1/p_i^{\alpha_i s}$-et vesszük, a többi tényezőből pedig 1-et. (Azok a szorzatok nullával egyenlők, ahol végtelen sok $R_p(s)$-ből nem 1-et veszünk ki). Az s kitevőre a konvergencia miatt van szükség. Vagyis ez a képlet magába sűríti a számelmélet alaptételének állítását az összes pozitív egészre.

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens, $s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $1/n^s$ a jobb oldali szorzat beszorzásakor pontosan egyszer jelenik meg: amikor $R_{p_i}(s)$-ből $1/p_i^{\alpha_i s}$-et vesszük, a többi tényezőből pedig 1-et. (Azok a szorzatok nullával egyenlők, ahol végtelen sok $R_p(s)$-ből nem 1-et veszünk ki). Az s kitevőre a konvergencia miatt van szükség. Vagyis ez a képlet magába sűríti a számelmélet alaptételének állítását az összes pozitív egészre. A képlet $s = 1$-re nem alkalmazható,

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens, $s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $1/n^s$ a jobb oldali szorzat beszorzásakor pontosan egyszer jelenik meg: amikor $R_{p_i}(s)$-ből $1/p_i^{\alpha_i s}$-et vesszük, a többi tényezőből pedig 1-et. (Azok a szorzatok nullával egyenlők, ahol végtelen sok $R_p(s)$-ből nem 1-et veszünk ki). Az s kitevőre a konvergencia miatt van szükség. Vagyis ez a képlet magába sűríti a számelmélet alaptételének állítását az összes pozitív egészre. A képlet $s = 1$-re nem alkalmazható, de egy véges változata igen,

Kapcsolat a Riemann-függvénnyel

Legyen $R_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{ks}} + \ldots$. Ekkor
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} R_p(s)$ (ez az Euler-formula).

A végtelen mértani sor összegképlete miatt $R_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$.
Az állítás akkor igaz, ha mindkét oldal abszolút konvergens, $s > 1$-re biztosan, de ezzel most nem foglalkozunk.
Heurisztika: Ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $1/n^s$ a jobb oldali szorzat beszorzásakor pontosan egyszer jelenik meg: amikor $R_{p_i}(s)$-ből $1/p_i^{\alpha_i s}$-et vesszük, a többi tényezőből pedig 1-et. (Azok a szorzatok nullával egyenlők, ahol végtelen sok $R_p(s)$-ből nem 1-et veszünk ki). Az s kitevőre a konvergencia miatt van szükség. Vagyis ez a képlet magába sűríti a számelmélet alaptételének állítását az összes pozitív egészre. A képlet $s = 1$-re nem alkalmazható, de egy véges változata igen, ez vezet el a prímek reciprokösszegének vizsgálatához.

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} \geq \log\log n - \log 2.$

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \geq \log \log n - \log 2$. Így $\sum_{p} \frac{1}{p}$ divergens.

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p \le n} \frac{1}{p} \ge \log \log n - \log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p \le n} \frac{1}{p} \ge \log\log n - \log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}\geq \log\log n-\log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}<2$ és $\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\geq \log n$,

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} \geq \log\log n - \log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ és $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \geq \log n$, továbbá hogy $\log(1+x) \leq x$, ha $x > -1$.

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p\le n}\frac{1}{p}\ge\log\log n-\log 2$. Így $\sum_p\frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}<2$ és $\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\ge\log n$, továbbá hogy $\log(1+x)\le x$, ha $x>-1$. (Ezek elemiek.)

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p\le n}\frac{1}{p}\ge\log\log n-\log 2$. Így $\sum_p\frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}<2$ és $\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\ge\log n$, továbbá hogy $\log(1+x)\le x$, ha $x>-1$. (Ezek elemiek.)

A $P=\prod_{p\le n}\left(1+\frac{1}{p}\right)\ge\sum_{m\,\le\, n,\ m\text{ négyzetmentes}}\frac{1}{m}=N$ összefüggés közvetlen beszorzással látható.

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \geq \log\log n - \log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ és $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \geq \log n$, továbbá hogy $\log(1+x) \leq x$, ha $x > -1$. (Ezek elemiek.)

A $P = \prod_{p \leq n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \geq \sum_{m \leq n,\ m \text{ négyzetmentes}} \frac{1}{m} = N$ összefüggés közvetlen beszorzással látható. Mivel minden $d \geq 1$ egyértelműen bontható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzatára,

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p\le n} \frac{1}{p} \ge \log\log n - \log 2$. Így $\sum_{p} \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ és $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \ge \log n$, továbbá hogy $\log(1+x) \le x$, ha $x > -1$. (Ezek elemiek.)

A $P = \prod_{p\le n} \left(1+\frac{1}{p}\right) \ge \sum_{m\,\le\, n,\ m \text{ négyzetmentes}} \frac{1}{m} = N$ összefüggés közvetlen beszorzással látható. Mivel minden $d \ge 1$ egyértelműen bontható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzatára, így $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \le N \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$.

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} \geq \log\log n - \log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ és $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \geq \log n$, továbbá hogy $\log(1+x) \leq x$, ha $x > -1$. (Ezek elemiek.)

A $P = \prod_{p\leq n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \geq \sum_{m \leq n,\ m \text{ négyzetmentes}} \frac{1}{m} = N$ összefüggés közvetlen beszorzással látható. Mivel minden $d \geq 1$ egyértelműen bontható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzatára, így $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \leq N \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$.
Tehát $P \geq N \geq (1/2)\log n$.

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p \le n} \frac{1}{p} \ge \log\log n - \log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ és $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \ge \log n$, továbbá hogy $\log(1+x) \le x$, ha $x > -1$. (Ezek elemiek.)

A $P = \prod_{p \le n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \ge \sum_{m \,\le\, n,\ m \text{ négyzetmentes}} \frac{1}{m} = N$ összefüggés közvetlen beszorzással látható. Mivel minden $d \ge 1$ egyértelműen bontható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzatára, így $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \le N \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$.
Tehát $P \ge N \ge (1/2)\log n$. Másrészt $\log(1+x) \le x$ miatt
$\log P = \sum_{p \le n} \log\left(1 + \frac{1}{p}\right)$

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p\le n}\frac{1}{p}\ge \log\log n-\log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}<2$ és $\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\ge \log n$, továbbá hogy $\log(1+x)\le x$, ha $x>-1$. (Ezek elemiek.)

A $P=\prod_{p\le n}\left(1+\frac{1}{p}\right)\ge \sum_{m\,\le\, n,\ m \text{ négyzetmentes}}\frac{1}{m}=N$ összefüggés közvetlen beszorzással látható. Mivel minden $d\ge 1$ egyértelműen bontható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzatára, így $\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\le N\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$.
Tehát $P\ge N\ge (1/2)\log n$. Másrészt $\log(1+x)\le x$ miatt $\log P=\sum_{p\le n}\log\left(1+\frac{1}{p}\right)\le\sum_{p\le n}\frac{1}{p}$.

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p\le n}\frac{1}{p}\ge \log\log n-\log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}<2$ és $\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\ge \log n$, továbbá hogy $\log(1+x)\le x$, ha $x>-1$. (Ezek elemiek.)

A $P=\prod_{p\le n}\left(1+\frac{1}{p}\right)\ge \sum_{m\,\le\, n,\ m \text{ négyzetmentes}}\frac{1}{m}=N$ összefüggés közvetlen beszorzással látható. Mivel minden $d\ge 1$ egyértelműen bontható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzatára, így $\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\le N\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$.
Tehát $P\ge N\ge (1/2)\log n$. Másrészt $\log(1+x)\le x$ miatt $\log P=\sum_{p\le n}\log\left(1+\frac{1}{p}\right)\le\sum_{p\le n}\frac{1}{p}$. Az eddigieket összegezve $\sum_{p\le n}\frac{1}{p}\ge \log\left((1/2)\log n\right)$

A prímek reciprokösszege divergens

Tétel (FGy5.6.1)

$\sum_{p \le n} \frac{1}{p} \ge \log \log n - \log 2$. Így $\sum_p \frac{1}{p}$ divergens.
(A p az ilyen összegzésekben ezentúl prímszámot jelöl.)

Felhasználjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ és $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \ge \log n$, továbbá hogy $\log(1+x) \le x$, ha $x > -1$. (Ezek elemiek.)

A $P = \prod_{p \le n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \ge \sum_{m \le n,\ m \text{ négyzetmentes}} \frac{1}{m} = N$ összefüggés közvetlen beszorzással látható. Mivel minden $d \ge 1$ egyértelműen bontható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzatára, így $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \le N \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$.
Tehát $P \ge N \ge (1/2) \log n$. Másrészt $\log(1+x) \le x$ miatt $\log P = \sum_{p \le n} \log\left(1 + \frac{1}{p}\right) \le \sum_{p \le n} \frac{1}{p}$. Az eddigieket összegezve $\sum_{p \le n} \frac{1}{p} \ge \log\left((1/2) \log n\right) = \log \log n - \log 2$. $\square$

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$.

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \le t, s < 1$.
Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$,

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$.
Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n+m) + (t+s)$,

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$.
Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n + m) + (t + s)$,
ezért $\lfloor x + y \rfloor$ értéke $n + m$ vagy $n + m + 1$ lehet csak aszerint,

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$.
Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n + m) + (t + s)$, ezért $\lfloor x + y \rfloor$ értéke $n + m$ vagy $n + m + 1$ lehet csak aszerint, hogy $t + s < 1$ vagy $1 \leq t + s < 2$.

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$.
Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n + m) + (t + s)$, ezért $\lfloor x + y \rfloor$ értéke $n + m$ vagy $n + m + 1$ lehet csak aszerint, hogy $t + s < 1$ vagy $1 \leq t + s < 2$. Az első esetben $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0,

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$. Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n + m) + (t + s)$, ezért $\lfloor x + y \rfloor$ értéke $n + m$ vagy $n + m + 1$ lehet csak aszerint, hogy $t + s < 1$ vagy $1 \leq t + s < 2$. Az első esetben $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0, a másodikban 1. $\square$

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$. Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n+m) + (t+s)$, ezért $\lfloor x+y \rfloor$ értéke $n+m$ vagy $n+m+1$ lehet csak aszerint, hogy $t+s<1$ vagy $1 \leq t+s < 2$. Az első esetben $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0, a másodikban 1. □

Egy p prím kitevője $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$-ban a Legendre-formula szerint

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$. Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n+m) + (t+s)$, ezért $\lfloor x+y \rfloor$ értéke $n+m$ vagy $n+m+1$ lehet csak aszerint, hogy $t+s < 1$ vagy $1 \leq t+s < 2$. Az első esetben $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0, a másodikban 1. □

Egy p prím kitevője $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$-ban a Legendre-formula szerint $m = \sum_{i=1}^{t} \left(\lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor - \lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor - \lfloor \frac{n-k}{p^i} \rfloor \right)$,

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$. Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n+m) + (t+s)$, ezért $\lfloor x+y \rfloor$ értéke $n+m$ vagy $n+m+1$ lehet csak aszerint, hogy $t+s < 1$ vagy $1 \leq t+s < 2$. Az első esetben $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0, a másodikban 1. □

Egy p prím kitevője $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$-ban a Legendre-formula szerint $m = \sum_{i=1}^{t} \left(\lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor - \lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor - \lfloor \frac{n-k}{p^i} \rfloor \right)$, ahol t a legnagyobb egész, amelyre még $p^t \leq n$.

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$. Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n+m) + (t+s)$, ezért $\lfloor x+y \rfloor$ értéke $n+m$ vagy $n+m+1$ lehet csak aszerint, hogy $t + s < 1$ vagy $1 \leq t + s < 2$. Az első esetben $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0, a másodikban 1. □

Egy p prím kitevője $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$-ban a Legendre-formula szerint $m = \sum_{i=1}^{t} \left(\lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor - \lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor - \lfloor \frac{n-k}{p^i} \rfloor \right)$, ahol t a legnagyobb egész, amelyre még $p^t \leq n$. Az Állítás szerint az összeg minden tagja 0 vagy 1,

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$. Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n+m) + (t+s)$, ezért $\lfloor x+y \rfloor$ értéke $n + m$ vagy $n + m + 1$ lehet csak aszerint, hogy $t + s < 1$ vagy $1 \leq t + s < 2$. Az első esetben $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0, a másodikban 1. □

Egy p prím kitevője $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$-ban a Legendre-formula szerint $m = \sum_{i=1}^{t} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \right)$, ahol t a legnagyobb egész, amelyre még $p^t \leq n$. Az Állítás szerint az összeg minden tagja 0 vagy 1, ezért $m \leq t$,

A binomiális együtthatók prímhatvány-osztói

Tétel (FGy5.4.4)

Az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány-osztója legfeljebb n.

Állítás: $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0 vagy 1 (x, y valós).

Valóban, legyen $x = n + t$ és $y = m + s$, ahol $0 \leq t, s < 1$. Ekkor $\lfloor x \rfloor = n$, $\lfloor y \rfloor = m$, és mivel $x + y = (n+m) + (t+s)$, ezért $\lfloor x+y \rfloor$ értéke $n+m$ vagy $n+m+1$ lehet csak aszerint, hogy $t+s<1$ vagy $1 \leq t+s < 2$. Az első esetben $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ értéke 0, a másodikban 1. □

Egy p prím kitevője $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$-ban a Legendre-formula szerint $m = \sum_{i=1}^{t} \left(\lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor - \lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor - \lfloor \frac{n-k}{p^i} \rfloor \right)$, ahol t a legnagyobb egész, amelyre még $p^t \leq n$. Az Állítás szerint az összeg minden tagja 0 vagy 1, ezért $m \leq t$, így $p^m \leq p^t \leq n$. □

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként.

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n,

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is,

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$.

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. Ezt összegezve $k = 1$-től $n - 1$-ig, a binomiális tétel szerint $2^n \leq (n-1)n^{\pi(n)} + 2$

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. Ezt összegezve $k = 1$-től $n - 1$-ig, a binomiális tétel szerint $2^n \leq (n-1)n^{\pi(n)} + 2 \leq n^{\pi(n)+1}$.

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. Ezt összegezve $k = 1$-től $n - 1$-ig, a binomiális tétel szerint $2^n \leq (n-1)n^{\pi(n)} + 2 \leq n^{\pi(n)+1}$. Logaritmust véve $\pi(n) \geq (\log 2)\frac{n}{\log n} - 1$

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. Ezt összegezve $k = 1$-től $n - 1$-ig, a binomiális tétel szerint $2^n \leq (n-1)n^{\pi(n)} + 2 \leq n^{\pi(n)+1}$. Logaritmust véve $\pi(n) \geq (\log 2)\frac{n}{\log n} - 1 \geq (\log 2 - 0{,}4)\frac{n}{\log n}$. □

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. Ezt összegezve $k = 1$-től $n-1$-ig, a binomiális tétel szerint $2^n \leq (n-1)n^{\pi(n)} + 2 \leq n^{\pi(n)+1}$. Logaritmust véve $\pi(n) \geq (\log 2)\frac{n}{\log n} - 1 \geq (\log 2 - 0{,}4)\frac{n}{\log n}$. $\square$

A Nagy Prímszámtétel szerint minden 1-nél kisebb c megfelelő, ha x elegendően nagy.

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. Ezt összegezve $k = 1$-től $n - 1$-ig, a binomiális tétel szerint $2^n \leq (n-1)n^{\pi(n)} + 2 \leq n^{\pi(n)+1}$. Logaritmust véve $\pi(n) \geq (\log 2)\frac{n}{\log n} - 1 \geq (\log 2 - 0{,}4)\frac{n}{\log n}$. $\square$

A Nagy Prímszámtétel szerint minden 1-nél kisebb c megfelelő, ha x elegendően nagy. Sőt, az is igaz, hogy $c = 1$ is választható elég nagy x-re.

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. Ezt összegezve $k = 1$-től $n - 1$-ig, a binomiális tétel szerint $2^n \leq (n-1)n^{\pi(n)} + 2 \leq n^{\pi(n)+1}$. Logaritmust véve $\pi(n) \geq (\log 2)\frac{n}{\log n} - 1 \geq (\log 2 - 0{,}4)\frac{n}{\log n}$. □

A Nagy Prímszámtétel szerint minden 1-nél kisebb c megfelelő, ha x elegendően nagy. Sőt, az is igaz, hogy $c = 1$ is választható elég nagy x-re. Itt a $\log(2) - 0{,}4$ azért szerepel, hogy a bizonyítás már $x \geq 2$-től működjön.

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. Ezt összegezve $k = 1$-től $n - 1$-ig, a binomiális tétel szerint $2^n \leq (n-1)n^{\pi(n)} + 2 \leq n^{\pi(n)+1}$. Logaritmust véve $\pi(n) \geq (\log 2)\frac{n}{\log n} - 1 \geq (\log 2 - 0{,}4)\frac{n}{\log n}$. □

A Nagy Prímszámtétel szerint minden 1-nél kisebb c megfelelő, ha x elegendően nagy. Sőt, az is igaz, hogy $c = 1$ is választható elég nagy x-re. Itt a $\log(2) - 0{,}4$ azért szerepel, hogy a bizonyítás már $x \geq 2$-től működjön.

A Nagy Prímszámtétel szerint $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$ is teljesül elég nagy x-re minden $c > 1$ esetén.

$\pi(x)$ alsó becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra $\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq 2$.

Valóban, írjuk föl $\binom{n}{k}$-t prímhatványok szorzataként. Láttuk, hogy mindegyik legfeljebb n, és persze a megfelelő prímek is, ezért $\binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$. Ezt összegezve $k = 1$-től $n-1$-ig, a binomiális tétel szerint $2^n \leq (n-1)n^{\pi(n)} + 2 \leq n^{\pi(n)+1}$. Logaritmust véve $\pi(n) \geq (\log 2)\frac{n}{\log n} - 1 \geq (\log 2 - 0{,}4)\frac{n}{\log n}$. □

A Nagy Prímszámtétel szerint minden 1-nél kisebb c megfelelő, ha x elegendően nagy. Sőt, az is igaz, hogy $c = 1$ is választható elég nagy x-re. Itt a $\log(2) - 0{,}4$ azért szerepel, hogy a bizonyítás már $x \geq 2$-től működjön.

A Nagy Prímszámtétel szerint $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$ is teljesül elég nagy x-re minden $c > 1$ esetén. Ezért a fenti alsó becslésben semmilyen $c > 1$ érték nem választható.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \leq p \leq 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \le p \le 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót,

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \leq p \leq 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót, de a $k!(k+1)!$ nevezőt nem. $\square$

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \le p \le 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót, de a $k!(k+1)!$ nevezőt nem. □

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \leq p \leq 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót, de a $k!(k+1)!$ nevezőt nem. $\square$

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.

$n \leq 3$ esetén nyilvánvaló.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \leq p \leq 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót, de a $k!(k+1)!$ nevezőt nem. $\square$

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.
$n \leq 3$ esetén nyilvánvaló. Ha n páros, akkor $P_n = P_{n-1} \leq 4^{n-1}$.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k + 2 \leq p \leq 2k + 1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k + 1)!$ számlálót, de a $k!(k + 1)!$ nevezőt nem. $\square$

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.
$n \leq 3$ esetén nyilvánvaló. Ha n páros, akkor $P_n = P_{n-1} \leq 4^{n-1}$.
Ha $n = 2k + 1$ páratlan, akkor $P_n = P_{k+1} \prod_{k+2 \leq p \leq 2k+1} p$.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \le p \le 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót, de a $k!(k+1)!$ nevezőt nem. □

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.
$n \le 3$ esetén nyilvánvaló. Ha n páros, akkor $P_n = P_{n-1} \le 4^{n-1}$.
Ha $n = 2k+1$ páratlan, akkor $P_n = P_{k+1} \prod_{k+2 \le p \le 2k+1} p$.
Az első tényező az indukciós feltevés miatt legfeljebb 4^{k+1}.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \leq p \leq 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót, de a $k!(k+1)!$ nevezőt nem. □

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.
$n \leq 3$ esetén nyilvánvaló. Ha n páros, akkor $P_n = P_{n-1} \leq 4^{n-1}$.
Ha $n = 2k+1$ páratlan, akkor $P_n = P_{k+1} \prod_{k+2 \leq p \leq 2k+1} p$.
Az első tényező az indukciós feltevés miatt legfeljebb 4^{k+1}.
A második a fenti Ötlet miatt osztója $\binom{2k+1}{k}$-nak.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k + 2 \le p \le 2k + 1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k + 1)!$ számlálót, de a $k!(k + 1)!$ nevezőt nem. $\square$

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.
$n \le 3$ esetén nyilvánvaló. Ha n páros, akkor $P_n = P_{n-1} \le 4^{n-1}$.
Ha $n = 2k + 1$ páratlan, akkor $P_n = P_{k+1} \prod_{k+2 \le p \le 2k+1} p$.
Az első tényező az indukciós feltevés miatt legfeljebb 4^{k+1}.
A második a fenti Ötlet miatt osztója $\binom{2k+1}{k}$-nak.
Ezért elég belátni, hogy $\binom{2k+1}{k} \le 4^k$.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \leq p \leq 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót, de a $k!(k+1)!$ nevezőt nem. $\square$

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.

$n \leq 3$ esetén nyilvánvaló. Ha n páros, akkor $P_n = P_{n-1} \leq 4^{n-1}$.

Ha $n = 2k+1$ páratlan, akkor $P_n = P_{k+1} \prod_{k+2 \leq p \leq 2k+1} p$.

Az első tényező az indukciós feltevés miatt legfeljebb 4^{k+1}.

A második a fenti Ötlet miatt osztója $\binom{2k+1}{k}$-nak.

Ezért elég belátni, hogy $\binom{2k+1}{k} \leq 4^k$.

A binomiális tétel szerint $\sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k$.

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \le p \le 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót, de a $k!(k+1)!$ nevezőt nem. $\square$

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.
$n \le 3$ esetén nyilvánvaló. Ha n páros, akkor $P_n = P_{n-1} \le 4^{n-1}$.
Ha $n = 2k+1$ páratlan, akkor $P_n = P_{k+1} \prod_{k+2 \le p \le 2k+1} p$.
Az első tényező az indukciós feltevés miatt legfeljebb 4^{k+1}.
A második a fenti Ötlet miatt osztója $\binom{2k+1}{k}$-nak.
Ezért elég belátni, hogy $\binom{2k+1}{k} \le 4^k$.
A binomiális tétel szerint $\sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k$.
Az összeg két egyenlő tagja $d = \binom{2k+1}{k} = \binom{2k+1}{k+1}$,

A prímek szorzata

Tétel (FGy5.4.5)

$P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$.

Ötlet: Ha $k+2 \le p \le 2k+1$, akkor $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Valóban, p osztja a $(2k+1)!$ számlálót, de a $k!(k+1)!$ nevezőt nem. $\square$

Erdős Pál és Kalmár László bizonyítása: indukció n-re.
$n \le 3$ esetén nyilvánvaló. Ha n páros, akkor $P_n = P_{n-1} \le 4^{n-1}$.
Ha $n = 2k+1$ páratlan, akkor $P_n = P_{k+1} \prod_{k+2 \le p \le 2k+1} p$.
Az első tényező az indukciós feltevés miatt legfeljebb 4^{k+1}.
A második a fenti Ötlet miatt osztója $\binom{2k+1}{k}$-nak.
Ezért elég belátni, hogy $\binom{2k+1}{k} \le 4^k$.
A binomiális tétel szerint $\sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k$.
Az összeg két egyenlő tagja $d = \binom{2k+1}{k} = \binom{2k+1}{k+1}$, így $d \le 4^k$. $\square$

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél.

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el,

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.

Így $4^n \geq \sqrt{n}^{\left(\pi(n) - \pi(\sqrt{n})\right)}$

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \le c\frac{x}{\log x}$, ha $x \ge x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.

Így $4^n \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n) - \pi(\sqrt{n})\right)} \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n) - \sqrt{n}\right)}$,

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.

Így $4^n \geq \sqrt{n}^{\left(\pi(n) - \pi(\sqrt{n})\right)} \geq \sqrt{n}^{\left(\pi(n) - \sqrt{n}\right)}$, hiszen $\pi\left(\sqrt{n}\right) \leq \sqrt{n}$.

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \le c\frac{x}{\log x}$, ha $x \ge x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.
Így $4^n \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\pi(\sqrt{n})\right)} \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\sqrt{n}\right)}$, hiszen $\pi\left(\sqrt{n}\right) \le \sqrt{n}$.
Logaritmust véve $(\log 4)n \ge \left(\pi(n) - \sqrt{n}\right) \log \sqrt{n}$,

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.

Így $4^n \geq \sqrt{n}^{\left(\pi(n) - \pi(\sqrt{n})\right)} \geq \sqrt{n}^{\left(\pi(n) - \sqrt{n}\right)}$, hiszen $\pi\left(\sqrt{n}\right) \leq \sqrt{n}$.
Logaritmust véve $(\log 4)n \geq \left(\pi(n) - \sqrt{n}\right) \log \sqrt{n}$, ahonnan $\pi(n) \leq \frac{(4 \log 2)n}{\log n} + \sqrt{n}$.

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \le c\frac{x}{\log x}$, ha $x \ge x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.
Így $4^n \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\pi(\sqrt{n})\right)} \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\sqrt{n}\right)}$, hiszen $\pi\left(\sqrt{n}\right) \le \sqrt{n}$.
Logaritmust véve $(\log 4)n \ge \left(\pi(n) - \sqrt{n}\right) \log \sqrt{n}$, ahonnan $\pi(n) \le \frac{(4\log 2)n}{\log n} + \sqrt{n}$. Mivel $\frac{\sqrt{n}}{n/\log n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$ ha $n \to \infty$,

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p\leq n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.

Így $4^n \geq \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\pi(\sqrt{n})\right)} \geq \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\sqrt{n}\right)}$, hiszen $\pi\left(\sqrt{n}\right) \leq \sqrt{n}$.
Logaritmust véve $(\log 4)n \geq \left(\pi(n) - \sqrt{n}\right)\log\sqrt{n}$, ahonnan $\pi(n) \leq \frac{(4\log 2)n}{\log n} + \sqrt{n}$. Mivel $\frac{\sqrt{n}}{n/\log n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$ ha $n \to \infty$, ezért elég nagy n-re $\sqrt{n} \leq 0{,}01\frac{n}{\log n}$.

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \le c\frac{x}{\log x}$, ha $x \ge x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.
Így $4^n \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\pi(\sqrt{n})\right)} \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\sqrt{n}\right)}$, hiszen $\pi(\sqrt{n}) \le \sqrt{n}$.
Logaritmust véve $(\log 4)n \ge \left(\pi(n) - \sqrt{n}\right) \log \sqrt{n}$, ahonnan $\pi(n) \le \frac{(4\log 2)n}{\log n} + \sqrt{n}$. Mivel $\frac{\sqrt{n}}{n/\log n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$ ha $n \to \infty$,
ezért elég nagy n-re $\sqrt{n} \le 0{,}01\frac{n}{\log n}$. Ezzel beláttuk,
hogy elég nagy x-re $\pi(x) \le c\frac{x}{\log x}$,

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.

Így $4^n \geq \sqrt{n}^{(\pi(n)-\pi(\sqrt{n}))} \geq \sqrt{n}^{(\pi(n)-\sqrt{n})}$, hiszen $\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$.
Logaritmust véve $(\log 4)n \geq \left(\pi(n) - \sqrt{n}\right) \log \sqrt{n}$, ahonnan $\pi(n) \leq \frac{(4\log 2)n}{\log n} + \sqrt{n}$. Mivel $\frac{\sqrt{n}}{n/\log n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$ ha $n \to \infty$, ezért elég nagy n-re $\sqrt{n} \leq 0{,}01\frac{n}{\log n}$. Ezzel beláttuk, hogy elég nagy x-re $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ahol $c = 4\log 2 + 0{,}01$. $\square$

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ha $x \geq x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.

Így $4^n \geq \sqrt{n}^{\left(\pi(n) - \pi(\sqrt{n})\right)} \geq \sqrt{n}^{\left(\pi(n) - \sqrt{n}\right)}$, hiszen $\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$.

Logaritmust véve $(\log 4)n \geq \left(\pi(n) - \sqrt{n}\right) \log \sqrt{n}$, ahonnan $\pi(n) \leq \frac{(4\log 2)n}{\log n} + \sqrt{n}$. Mivel $\frac{\sqrt{n}}{n/\log n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$ ha $n \to \infty$, ezért elég nagy n-re $\sqrt{n} \leq 0{,}01\frac{n}{\log n}$. Ezzel beláttuk, hogy elég nagy x-re $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$, ahol $c = 4\log 2 + 0{,}01$. □

Ez a konstans körülbelül $2{,}78$.

$\pi(x)$ felső becslése

Tétel (FGy5.4.3)

Alkalmas c konstansra és x_0-ra $\pi(x) \le c\frac{x}{\log x}$, ha $x \ge x_0$.

Erdős Pál bizonyítása. A $P_n = \prod_{p \le n} p < 4^n$ szorzatot vágjuk ketté $\sqrt{n}$-nél. Az alsó felét hagyjuk el, a többi tényező helyére írjunk $\sqrt{n}$-et.

Így $4^n \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\pi(\sqrt{n})\right)} \ge \sqrt{n}^{\left(\pi(n)-\sqrt{n}\right)}$, hiszen $\pi(\sqrt{n}) \le \sqrt{n}$.

Logaritmust véve $(\log 4)n \ge \left(\pi(n) - \sqrt{n}\right)\log\sqrt{n}$, ahonnan

$\pi(n) \le \frac{(4\log 2)n}{\log n} + \sqrt{n}$. Mivel $\frac{\sqrt{n}}{n/\log n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$ ha $n \to \infty$,

ezért elég nagy n-re $\sqrt{n} \le 0{,}01\frac{n}{\log n}$. Ezzel beláttuk,

hogy elég nagy x-re $\pi(x) \le c\frac{x}{\log x}$, ahol $c = 4\log 2 + 0{,}01$. □

Ez a konstans körülbelül $2{,}78$. Elsőként Csebisev bizonyította be $\pi(x)$-nek ilyen alsó és felső becslését.

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak,

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1,

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$,

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.

Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. □

Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.

Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. □

Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$,

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.

Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$

Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.

Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$

Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.

Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$,

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$,

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$

Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$

Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$, $(n, 2n]$ közül.

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$, $(n, 2n]$ közül.
A tétel állítása: $C > 1$.

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$, $(n, 2n]$ közül.
A tétel állítása: $C > 1$. Így A, B-re felső,

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$, $(n, 2n]$ közül.
A tétel állítása: $C > 1$. Így A, B-re felső, $\binom{2n}{n}$-re alsó becslés kell.

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$, $(n, 2n]$ közül.
A tétel állítása: $C > 1$. Így A, B-re felső, $\binom{2n}{n}$-re alsó becslés kell.

$\binom{2n}{n}$ számlálójában a $2k + 1 > 1$ tényezők helyére írjunk $2k$-t,

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. □
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. □
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. □

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$, $(n, 2n]$ közül.
A tétel állítása: $C > 1$. Így A, B-re felső, $\binom{2n}{n}$-re alsó becslés kell.

$\binom{2n}{n}$ számlálójában a $2k+1 > 1$ tényezők helyére írjunk $2k$-t, emeljünk ki 2-t minden tényezőből,

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$, $(n, 2n]$ közül.
A tétel állítása: $C > 1$. Így A, B-re felső, $\binom{2n}{n}$-re alsó becslés kell.

$\binom{2n}{n}$ számlálójában a $2k + 1 > 1$ tényezők helyére írjunk $2k$-t, emeljünk ki 2-t minden tényezőből, majd egyszerűsítsünk $n!(n-1)!$-al.

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$, $(n, 2n]$ közül.
A tétel állítása: $C > 1$. Így A, B-re felső, $\binom{2n}{n}$-re alsó becslés kell.

$\binom{2n}{n}$ számlálójában a $2k+1 > 1$ tényezők helyére írjunk $2k$-t, emeljünk ki 2-t minden tényezőből, majd egyszerűsítsünk $n!(n-1)!$-al. Az eredmény $2^{2n-1}/n$.

Csebisev tétele

Erdős Pál bizonyításának vázlata. Ha $n < p \leq 2n$, akkor p kitevője a $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ binomiális együtthatóban 1.
Valóban, $2p$ már nem osztója $(2n)!$-nak, ezért p kitevője a számlálóban 1, a nevező viszont nem osztható p-vel. $\square$
Állítás: Ha $2n/3 < p \leq n$, akkor p nem osztója $\binom{2n}{n}$-nek.
Valóban, ilyenkor p kitevője a számlálóban és a nevezőben is 2. $\square$
Állítás: Ha $\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$, és $p^t \mid \binom{2n}{n}$, akkor $t \leq 1$.
Valóban, láttuk, hogy $p^t \leq 2n$, ezért $p > \sqrt{2n}$ miatt $t \leq 1$. $\square$

Stratégia: Legyen $\binom{2n}{n} = ABC$ aszerint, hogy a prímosztók melyik intervallumban vannak $[1, \sqrt{2n}]$, $(\sqrt{2n}, (2/3)n]$, $(n, 2n]$ közül.
A tétel állítása: $C > 1$. Így A, B-re felső, $\binom{2n}{n}$-re alsó becslés kell.

$\binom{2n}{n}$ számlálójában a $2k+1 > 1$ tényezők helyére írjunk $2k$-t, emeljünk ki 2-t minden tényezőből, majd egyszerűsítsünk $n!(n-1)!$-al. Az eredmény $2^{2n-1}/n$. Ezért $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$.

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n,

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$

$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$

$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. □

$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. □

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \geq \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \le (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$

$B \le \prod_{\sqrt{2n}<p\le 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \ge \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$

$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \geq \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)

Logaritmust véve $\log C \geq (n/3)\log 4 - (\sqrt{2n}+1)\log(2n)$.

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$
$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \geq \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)
Logaritmust véve $\log C \geq (n/3)\log 4 - (\sqrt{2n}+1)\log(2n)$.
Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$,

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$

$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \geq \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)

Logaritmust véve $\log C \geq (n/3)\log 4 - (\sqrt{2n}+1)\log(2n)$.

Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért C is végtelenhez tart.

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \le (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$

$B \le \prod_{\sqrt{2n}<p\le 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \ge \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)

Logaritmust véve $\log C \ge (n/3)\log 4 - (\sqrt{2n}+1)\log(2n)$.

Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért C is végtelenhez tart.

Konkrétan $n = 474$-re már $C > 1$.

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$
$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \geq \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)
Logaritmust véve $\log C \geq (n/3)\log 4 - (\sqrt{2n}+1)\log(2n)$.
Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért C is végtelenhez tart.

Konkrétan $n = 474$-re már $C > 1$. Az ennél kisebb számokra úgy ellenőrizhetjük Csebisev tételét,

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$
$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \geq \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)
Logaritmust véve $\log C \geq (n/3)\log 4 - (\sqrt{2n}+1)\log(2n)$.
Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért C is végtelenhez tart.

Konkrétan $n = 474$-re már $C > 1$. Az ennél kisebb számokra úgy ellenőrizhetjük Csebisev tételét, hogy tekintjük a következő sorozatot: $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631$.

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. □
$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. □

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \geq \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)
Logaritmust véve $\log C \geq (n/3)\log 4 - (\sqrt{2n}+1)\log(2n)$.
Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért C is végtelenhez tart.

Konkrétan $n = 474$-re már $C > 1$. Az ennél kisebb számokra úgy ellenőrizhetjük Csebisev tételét, hogy tekintjük a következő sorozatot: $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631$.
Ezek mind prímek, és mindegyik kisebb az előző kétszeresénél.

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \le (2n)^{\sqrt{2n}}$. □
$B \le \prod_{\sqrt{2n} < p \le 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. □

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \ge \dfrac{4^n}{(2n) \cdot (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)
Logaritmust véve $\log C \ge (n/3) \log 4 - (\sqrt{2n} + 1) \log(2n)$.
Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért C is végtelenhez tart.

Konkrétan $n = 474$-re már $C > 1$. Az ennél kisebb számokra úgy ellenőrizhetjük Csebisev tételét, hogy tekintjük a következő sorozatot: $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631$.
Ezek mind prímek, és mindegyik kisebb az előző kétszeresénél.
Ezért minden $n \le 500$ egészre valamelyikük n és $2n$ között van. □

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \le (2n)^{\sqrt{2n}}$. □
$B \le \prod_{\sqrt{2n} < p \le 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. □

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \ge \dfrac{4^n}{(2n) \cdot (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)
Logaritmust véve $\log C \ge (n/3) \log 4 - (\sqrt{2n} + 1) \log(2n)$.
Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért C is végtelenhez tart.

Konkrétan $n = 474$-re már $C > 1$. Az ennél kisebb számokra úgy ellenőrizhetjük Csebisev tételét, hogy tekintjük a következő sorozatot: $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631$.
Ezek mind prímek, és mindegyik kisebb az előző kétszeresénél.
Ezért minden $n \le 500$ egészre valamelyikük n és $2n$ között van. □
(Ezt a sorozatot Csebisev tétele miatt akármeddig lehet folytatni.)

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$
$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \geq \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)
Logaritmust véve $\log C \geq (n/3)\log 4 - (\sqrt{2n}+1)\log(2n)$.
Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért C is végtelenhez tart.

Konkrétan $n = 474$-re már $C > 1$. Az ennél kisebb számokra úgy ellenőrizhetjük Csebisev tételét, hogy tekintjük a következő sorozatot: $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631$.
Ezek mind prímek, és mindegyik kisebb az előző kétszeresénél.
Ezért minden $n \leq 500$ egészre valamelyikük n és $2n$ között van. $\square$
(Ezt a sorozatot Csebisev tétele miatt akármeddig lehet folytatni.)
Nem ismeretes, hogy n és $n+\sqrt{n}$ között mindig van-e prím.

A bizonyítás folytatása

A minden prímhatvány-osztója legfeljebb n, ezért $A \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$. $\square$
$B \leq \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p < 4^{2n/3}$ az Erdős–Kalmár-tétel alapján. $\square$

Összegezve $C = \binom{2n}{n}/(AB) \geq \dfrac{4^n}{(2n)\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\cdot 4^{2n/3}}$.

(Látjuk, miért fontos a $2n/3$ és n közötti prímektől megszabadulni.)
Logaritmust véve $\log C \geq (n/3)\log 4 - (\sqrt{2n}+1)\log(2n)$.
Mivel $\sqrt{n}/\log n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért C is végtelenhez tart.

Konkrétan $n = 474$-re már $C > 1$. Az ennél kisebb számokra úgy ellenőrizhetjük Csebisev tételét, hogy tekintjük a következő sorozatot: $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631$.
Ezek mind prímek, és mindegyik kisebb az előző kétszeresénél.
Ezért minden $n \leq 500$ egészre valamelyikük n és $2n$ között van. $\square$
(Ezt a sorozatot Csebisev tétele miatt akármeddig lehet folytatni.)
Nem ismeretes, hogy n és $n + \sqrt{n}$ között mindig van-e prím.
Tétel(FGy5.5.4): n és $n + n^{0,54}$ között van prím elég nagy n-re.

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között,

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c \frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$,

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).
Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$.

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5). Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$,

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$.

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$. A prímszámtétel miatt $n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$.

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c \frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$. A prímszámtétel miatt $n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$. De $\frac{\log p_n}{p_n^{\varepsilon}} \to 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén,

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$. A prímszámtétel miatt $n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$. De $\frac{\log p_n}{p_n^\varepsilon} \to 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén, ezért összeszorozva $\frac{p_n^{(1-\varepsilon)}}{n} \to 0$,

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$. A prímszámtétel miatt $n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$. De $\frac{\log p_n}{p_n^{\varepsilon}} \to 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén, ezért összeszorozva $\frac{p_n^{(1-\varepsilon)}}{n} \to 0$, azaz ≤ 1 elég nagy x-re.

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$. A prímszámtétel miatt $n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$. De $\frac{\log p_n}{p_n^{\varepsilon}} \to 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén, ezért összeszorozva $\frac{p_n^{(1-\varepsilon)}}{n} \to 0$, azaz ≤ 1 elég nagy x-re.

Innen $(1-\varepsilon)\log p_n \leq \log n$,

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c \frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$. A prímszámtétel miatt $n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$. De $\frac{\log p_n}{p_n^{\varepsilon}} \to 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén, ezért összeszorozva $\frac{p_n^{(1-\varepsilon)}}{n} \to 0$, azaz ≤ 1 elég nagy x-re.

Innen $(1-\varepsilon) \log p_n \leq \log n$, és így $1 - \varepsilon \leq \frac{\log n}{\log p_n} \leq 1$.

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$. A prímszámtétel miatt $n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$. De $\frac{\log p_n}{p_n^{\varepsilon}} \to 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén, ezért

összeszorozva $\frac{p_n^{(1-\varepsilon)}}{n} \to 0$, azaz ≤ 1 elég nagy x-re.

Innen $(1-\varepsilon)\log p_n \leq \log n$, és így $1 - \varepsilon \leq \frac{\log n}{\log p_n} \leq 1$.

Mivel ε tetszőlegesen kicsi lehet, $\frac{\log n}{\log p_n} \sim 1$.

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$. A prímszámtétel miatt $n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$. De $\frac{\log p_n}{p_n^{\varepsilon}} \to 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén, ezért összeszorozva $\frac{p_n^{(1-\varepsilon)}}{n} \to 0$, azaz ≤ 1 elég nagy x-re.

Innen $(1-\varepsilon)\log p_n \leq \log n$, és így $1 - \varepsilon \leq \frac{\log n}{\log p_n} \leq 1$.

Mivel ε tetszőlegesen kicsi lehet, $\frac{\log n}{\log p_n} \sim 1$. Megszorozva $\frac{n \log p_n}{p_n} \to 1$-gyel

A prímszámtétel következményei

A prímszámtételből következik, hogy nemcsak n és $2n$ között, hanem n és cn között is van prím minden $c > 1$ esetén (FGy5.5.5).

Valóban, $\frac{\pi(cx)}{\pi(x)} \sim c\frac{\log x}{\log cx} \sim c > 1$, hiszen $\frac{\log cx}{\log x} = \frac{\log c + \log x}{\log x} \to 1$, ha $x \to \infty$. Ezért elég nagy x-re $\pi(cx) > \pi(x)$, azaz van prím x és cx között. $\square$

Tétel (FGy5.4.2): Az n-edik prímszám, $p_n \sim n \log n$.

Valóban, definíció szerint $\pi(p_n) = n$. A prímszámtétel miatt $n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$. De $\frac{\log p_n}{p_n^{\varepsilon}} \to 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén, ezért

összeszorozva $\frac{p_n^{(1-\varepsilon)}}{n} \to 0$, azaz ≤ 1 elég nagy x-re.

Innen $(1-\varepsilon)\log p_n \leq \log n$, és így $1 - \varepsilon \leq \frac{\log n}{\log p_n} \leq 1$.

Mivel ε tetszőlegesen kicsi lehet, $\frac{\log n}{\log p_n} \sim 1$. Megszorozva $\frac{n \log p_n}{p_n} \to 1$-gyel $\frac{n \log n}{p_n} \to 1$ adódik. $\square$

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban.

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a, b) = 1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a, b) = 1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Tehát például $6k + 1$ és $6k + 5$ alakú prímből is kb. $(1/2)\frac{x}{\log x}$ darab van x-ig

Az $ak+b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a,b)=1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak+b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Tehát például $6k+1$ és $6k+5$ alakú prímből is kb. $(1/2)\frac{x}{\log x}$ darab van x-ig (ami sokkal több, mint a négyzetszámok $\sqrt{x}$ száma).

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a, b) = 1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Tehát például $6k + 1$ és $6k + 5$ alakú prímből is kb. $(1/2)\frac{x}{\log x}$ darab van x-ig (ami sokkal több, mint a négyzetszámok $\sqrt{x}$ száma).

A Dirichlet-tétel bizonyítása hasonló a prímszámtételéhez,

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a, b) = 1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Tehát például $6k + 1$ és $6k + 5$ alakú prímből is kb. $(1/2)\frac{x}{\log x}$ darab van x-ig (ami sokkal több, mint a négyzetszámok $\sqrt{x}$ száma).

A Dirichlet-tétel bizonyítása hasonló a prímszámtételéhez, csak a ζ-függvény helyett egy olyan $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ Dirichlet-függvényt használ,

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a, b) = 1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Tehát például $6k + 1$ és $6k + 5$ alakú prímből is kb. $(1/2)\frac{x}{\log x}$ darab van x-ig (ami sokkal több, mint a négyzetszámok $\sqrt{x}$ száma).

A Dirichlet-tétel bizonyítása hasonló a prímszámtételéhez, csak a ζ-függvény helyett egy olyan $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ Dirichlet-függvényt használ, ahol χ egy mod a periodikus, komplex értékű, szorzattartó leképezés

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a, b) = 1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Tehát például $6k + 1$ és $6k + 5$ alakú prímből is kb. $(1/2)\frac{x}{\log x}$ darab van x-ig (ami sokkal több, mint a négyzetszámok $\sqrt{x}$ száma).

A Dirichlet-tétel bizonyítása hasonló a prímszámtételéhez, csak a ζ-függvény helyett egy olyan $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ Dirichlet-függvényt használ, ahol χ egy mod a periodikus, komplex értékű, szorzattartó leképezés (úgynevezett csoportkarakter).

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a, b) = 1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Tehát például $6k + 1$ és $6k + 5$ alakú prímből is kb. $(1/2)\frac{x}{\log x}$ darab van x-ig (ami sokkal több, mint a négyzetszámok $\sqrt{x}$ száma).

A Dirichlet-tétel bizonyítása hasonló a prímszámtételéhez, csak a ζ-függvény helyett egy olyan $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ Dirichlet-függvényt használ, ahol χ egy mod a periodikus, komplex értékű, szorzattartó leképezés (úgynevezett csoportkarakter).

A prímszámtételt Gauss és Legendre is megsejtette.

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a, b) = 1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Tehát például $6k + 1$ és $6k + 5$ alakú prímből is kb. $(1/2)\frac{x}{\log x}$ darab van x-ig (ami sokkal több, mint a négyzetszámok $\sqrt{x}$ száma).

A Dirichlet-tétel bizonyítása hasonló a prímszámtételéhez, csak a ζ-függvény helyett egy olyan $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ Dirichlet-függvényt használ, ahol χ egy mod a periodikus, komplex értékű, szorzattartó leképezés (úgynevezett csoportkarakter).

A prímszámtételt Gauss és Legendre is megsejtette.
Riemann munkássága nyomán Hadamard és de la Vallée-Poussin bizonyította be 1896-ban.

Az $ak + b$ alakú prímek száma

Dirichlet tételének kvantitatív változata (FGy, F6.4.8)

A prímek közel egyenletesen helyezkednek el a számtani sorozatokban. Vagyis ha $(a, b) = 1$, akkor az x-nél nem nagyobb $ak + b$ alakú prímek száma aszimptotikusan $\pi(x)/\varphi(a)$.

Tehát például $6k + 1$ és $6k + 5$ alakú prímből is kb. $(1/2)\frac{x}{\log x}$ darab van x-ig (ami sokkal több, mint a négyzetszámok $\sqrt{x}$ száma).

A Dirichlet-tétel bizonyítása hasonló a prímszámtételéhez, csak a ζ-függvény helyett egy olyan $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ Dirichlet-függvényt használ, ahol χ egy mod a periodikus, komplex értékű, szorzattartó leképezés (úgynevezett csoportkarakter).

A prímszámtételt Gauss és Legendre is megsejtette.
Riemann munkássága nyomán Hadamard és de la Vallée-Poussin bizonyította be 1896-ban. Erdős Pál és Atle Selberg 1949-ben komplex analízis nélküli bizonyítást adott.

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek,

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés,

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés, további nevezetes problémák (FGy5.1).

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés, további nevezetes problémák (FGy5.1).

Tételek

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2).

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés, további nevezetes problémák (FGy5.1).

Tételek

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2).
Prímszámtétel,

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés, további nevezetes problémák (FGy5.1).

Tételek

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2).
Prímszámtétel, alsó és felső becslés
a prímek számára (FGy5.4.1, 5.4.3, 5.4.4).

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés, további nevezetes problémák (FGy5.1).

Tételek

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2).
Prímszámtétel, alsó és felső becslés
a prímek számára (FGy5.4.1, 5.4.3, 5.4.4).
Az n-edik prím nagysága (FGy5.4.2).

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés, további nevezetes problémák (FGy5.1).

Tételek

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2).
Prímszámtétel, alsó és felső becslés
a prímek számára (FGy5.4.1, 5.4.3, 5.4.4).
Az n-edik prím nagysága (FGy5.4.2).
Csebisev tétele (FGy5.5.3).

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés, további nevezetes problémák (FGy5.1).

Tételek

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2).
Prímszámtétel, alsó és felső becslés
a prímek számára (FGy5.4.1, 5.4.3, 5.4.4).
Az n-edik prím nagysága (FGy5.4.2).
Csebisev tétele (FGy5.5.3).
A prímek reciprokösszege végtelen (FGy5.6.1).

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés, további nevezetes problémák (FGy5.1).

Tételek

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2).
Prímszámtétel, alsó és felső becslés
a prímek számára (FGy5.4.1, 5.4.3, 5.4.4).
Az n-edik prím nagysága (FGy5.4.2).
Csebisev tétele (FGy5.5.3).
A prímek reciprokösszege végtelen (FGy5.6.1).
A prímek szorzatának becslése (FGy5.4.5, F5.4.4).

A 30. előadás összefoglalása

Fogalmak

Ikerprímek, Goldbach-sejtés, további nevezetes problémák (FGy5.1).

Tételek

Hézagtétel (FGy5.5.1, 5.5.2).
Prímszámtétel, alsó és felső becslés
a prímek számára (FGy5.4.1, 5.4.3, 5.4.4).
Az n-edik prím nagysága (FGy5.4.2).
Csebisev tétele (FGy5.5.3).
A prímek reciprokösszege végtelen (FGy5.6.1).
A prímek szorzatának becslése (FGy5.4.5, F5.4.4).
A prímek eloszlása számtani sorozatokban (FGy, F6.4.8).