Algebra és számelmélet

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Konzultáció: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

29. előadás

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.

Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.

Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.

Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ha $f(x)$ (totálisan) additív, akkor $c^{f(x)}$ (totálisan) multiplikatív.

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ha $f(x)$ (totálisan) additív, akkor $c^{f(x)}$ (totálisan) multiplikatív.
HF (FGy6.1.6–8): Ha $f \neq 0$ multiplikatív, akkor $f(1) = 1$.

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ha $f(x)$ (totálisan) additív, akkor $c^{f(x)}$ (totálisan) multiplikatív.
HF (FGy6.1.6–8): Ha $f \neq 0$ multiplikatív, akkor $f(1) = 1$.
(Totálisan) multiplikatív függvény a prímhatványokon (prímeken) tetszőlegesen megadható,

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ha $f(x)$ (totálisan) additív, akkor $c^{f(x)}$ (totálisan) multiplikatív.
HF (FGy6.1.6–8): Ha $f \neq 0$ multiplikatív, akkor $f(1) = 1$.
(Totálisan) multiplikatív függvény a prímhatványokon (prímeken) tetszőlegesen megadható, és ez egyértelműen meghatározza.

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ha $f(x)$ (totálisan) additív, akkor $c^{f(x)}$ (totálisan) multiplikatív.
HF (FGy6.1.6–8): Ha $f \neq 0$ multiplikatív, akkor $f(1) = 1$.
(Totálisan) multiplikatív függvény a prímhatványokon (prímeken) tetszőlegesen megadható, és ez egyértelműen meghatározza.
Ha f multiplikatív, és n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_k^{\alpha_k})$.

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ha $f(x)$ (totálisan) additív, akkor $c^{f(x)}$ (totálisan) multiplikatív.
HF (FGy6.1.6–8): Ha $f \neq 0$ multiplikatív, akkor $f(1) = 1$.
(Totálisan) multiplikatív függvény a prímhatványokon (prímeken) tetszőlegesen megadható, és ez egyértelműen meghatározza.
Ha f multiplikatív, és n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_k^{\alpha_k})$. Példák multiplikatív függvényre:

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ha $f(x)$ (totálisan) additív, akkor $c^{f(x)}$ (totálisan) multiplikatív.
HF (FGy6.1.6–8): Ha $f \neq 0$ multiplikatív, akkor $f(1) = 1$.
(Totálisan) multiplikatív függvény a prímhatványokon (prímeken) tetszőlegesen megadható, és ez egyértelműen meghatározza.
Ha f multiplikatív, és n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_k^{\alpha_k})$. Példák multiplikatív függvényre:
$\varphi(n)$ (Euler-függvény),

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ha $f(x)$ (totálisan) additív, akkor $c^{f(x)}$ (totálisan) multiplikatív.
HF (FGy6.1.6–8): Ha $f \neq 0$ multiplikatív, akkor $f(1) = 1$.
(Totálisan) multiplikatív függvény a prímhatványokon (prímeken) tetszőlegesen megadható, és ez egyértelműen meghatározza.
Ha f multiplikatív, és n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, akkor $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \ldots f(p_k^{\alpha_k})$. Példák multiplikatív függvényre:
$\varphi(n)$ (Euler-függvény), $d(n)$ (osztók száma),

Ismétlés

Definíció (FGy6.1.1–5)

Számelméleti függvény: a pozitív egészeken értelmezett, komplex értékű f függvény.
Az f totálisan multiplikatív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a)f(b)$.
Multiplikatív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.
Az f totálisan additív, ha minden a, b-re $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Additív, ha ezt csak $(a, b) = 1$ esetén tesszük föl.

Ha $f(x)$ (totálisan) additív, akkor $c^{f(x)}$ (totálisan) multiplikatív.
HF (FGy6.1.6–8): Ha $f \neq 0$ multiplikatív, akkor $f(1) = 1$.
(Totálisan) multiplikatív függvény a prímhatványokon (prímeken) tetszőlegesen megadható, és ez egyértelműen meghatározza.
Ha f multiplikatív, és n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_k^{\alpha_k})$. Példák multiplikatív függvényre:
$\varphi(n)$ (Euler-függvény), $d(n)$ (osztók száma), $\sigma(n)$ (osztók összege).

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Nyilván ω additív

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$. Nyilván ω additív és Ω totálisan additív.

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$. Nyilván ω additív és Ω totálisan additív.

Definíció (FGy6.2.3)

A $\mu(n)$ Möbius-függvény az a multiplikatív függvény, ami a p^k prímhatványon 1, ha $k = 1$,

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Nyilván ω additív és Ω totálisan additív.

Definíció (FGy6.2.3)

A $\mu(n)$ Möbius-függvény az a multiplikatív függvény, ami a p^k prímhatványon 1, ha $k = 1$, és 0, ha $k > 1$.

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Nyilván ω additív és Ω totálisan additív.

Definíció (FGy6.2.3)

A $\mu(n)$ Möbius-függvény az a multiplikatív függvény, ami a p^k prímhatványon 1, ha $k = 1$, és 0, ha $k > 1$.

Vagyis ha n nem négyzetmentes szám

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Nyilván ω additív és Ω totálisan additív.

Definíció (FGy6.2.3)

A $\mu(n)$ Möbius-függvény az a multiplikatív függvény, ami a p^k prímhatványon 1, ha $k = 1$, és 0, ha $k > 1$.

Vagyis ha n nem négyzetmentes szám (tehát van 1-nél nagyobb négyzetszám osztója),

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$. Nyilván ω additív és Ω totálisan additív.

Definíció (FGy6.2.3)

A $\mu(n)$ Möbius-függvény az a multiplikatív függvény, ami a p^k prímhatványon 1, ha $k = 1$, és 0, ha $k > 1$.

Vagyis ha n nem négyzetmentes szám (tehát van 1-nél nagyobb négyzetszám osztója), akkor $\mu(n) = 0$,

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Nyilván ω additív és Ω totálisan additív.

Definíció (FGy6.2.3)

A $\mu(n)$ Möbius-függvény az a multiplikatív függvény, ami a p^k prímhatványon 1, ha $k = 1$, és 0, ha $k > 1$.

Vagyis ha n nem négyzetmentes szám (tehát van 1-nél nagyobb négyzetszám osztója), akkor $\mu(n) = 0$, különben $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$.

További számelméleti függvények

Definíció (FGy6.2.5, 6.2.8)

$\omega(n)$ az n különböző (pozitív) prímosztónak a száma.
$\Omega(n)$ az n összes (pozitív) prímosztónak a száma.
Azaz ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\omega(n) = k$ és $\Omega(n) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$. Nyilván ω additív és Ω totálisan additív.

Definíció (FGy6.2.3)

A $\mu(n)$ Möbius-függvény az a multiplikatív függvény, ami a p^k prímhatványon 1, ha $k = 1$, és 0, ha $k > 1$.

Vagyis ha n nem négyzetmentes szám (tehát van 1-nél nagyobb négyzetszám osztója), akkor $\mu(n) = 0$, különben $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$. Belátjuk majd, hogy az n-edik primitív komplex egységgyökök összege $\mu(n)$ (K3.9.18).

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^{+}(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. $\square$

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. □
HF: Az azonosan 1 függvény összegezési függvénye $d(n)$,

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. $\square$

HF: Az azonosan 1 függvény összegezési függvénye $d(n)$,
az $f(n) = n$ összegezési függvénye $\sigma(n)$.

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. $\square$
HF: Az azonosan 1 függvény összegezési függvénye $d(n)$, az $f(n) = n$ összegezési függvénye $\sigma(n)$.

Definíció (FGy6.6.1)

Az f és g számelméleti függvények konvolúciója
$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. $\square$
HF: Az azonosan 1 függvény összegezési függvénye $d(n)$,
az $f(n) = n$ összegezési függvénye $\sigma(n)$.

Definíció (FGy6.6.1)

Az f és g számelméleti függvények konvolúciója
$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{cd=n} f(c)g(d)$.

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. $\square$
HF: Az azonosan 1 függvény összegezési függvénye $d(n)$, az $f(n) = n$ összegezési függvénye $\sigma(n)$.

Definíció (FGy6.6.1)

Az f és g számelméleti függvények konvolúciója
$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{cd=n} f(c)g(d)$.
„Egységelem” a konvolúcióra:

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. $\square$
HF: Az azonosan 1 függvény összegezési függvénye $d(n)$, az $f(n) = n$ összegezési függvénye $\sigma(n)$.

Definíció (FGy6.6.1)

Az f és g számelméleti függvények konvolúciója
$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{cd=n} f(c)g(d)$.
„Egységelem" a konvolúcióra: $e(1) = 1$,

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. □
HF: Az azonosan 1 függvény összegezési függvénye $d(n)$, az $f(n) = n$ összegezési függvénye $\sigma(n)$.

Definíció (FGy6.6.1)

Az f és g számelméleti függvények konvolúciója
$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{cd=n} f(c)g(d)$.
„Egységelem" a konvolúcióra: $e(1) = 1$, és $e(n) = 0$, ha $n > 1$.

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. □

HF: Az azonosan 1 függvény összegezési függvénye $d(n)$, az $f(n) = n$ összegezési függvénye $\sigma(n)$.

Definíció (FGy6.6.1)

Az f és g számelméleti függvények konvolúciója $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{cd=n} f(c)g(d)$.
„Egységelem" a konvolúcióra: $e(1) = 1$, és $e(n) = 0$, ha $n > 1$.

HF: $e * f = f$,

Összegezési függvény, konvolúció

Definíció (FGy6.5.1)

Az f függvény összegezési függvénye $f^+(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Példa: az Euler-függvény összegezési függvénye $\varphi^+(n) = n$.
Valóban: a körosztási polinomokra vonatkozó $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben vegyük mindkét oldal fokát. □
HF: Az azonosan 1 függvény összegezési függvénye $d(n)$, az $f(n) = n$ összegezési függvénye $\sigma(n)$.

Definíció (FGy6.6.1)

Az f és g számelméleti függvények konvolúciója
$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{cd=n} f(c)g(d)$.
„Egységelem" a konvolúcióra: $e(1) = 1$, és $e(n) = 0$, ha $n > 1$.

HF: $e * f = f$, és $1 * f = f^+$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív,

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk.

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem.

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$.

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$,

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.
Inverz: $f * g = e$-t akarjuk g-re megoldani.

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.
Inverz: $f * g = e$-t akarjuk g-re megoldani. Ha $g(k)$ már megvan $k < n$-re,

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.
Inverz: $f * g = e$-t akarjuk g-re megoldani. Ha $g(k)$ már megvan $k < n$-re, akkor $0 = e(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$-ből $g(n)$ kifejezhető,

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.
Inverz: $f * g = e$-t akarjuk g-re megoldani. Ha $g(k)$ már megvan $k < n$-re, akkor $0 = e(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$-ből $g(n)$ kifejezhető, hiszen az összegben $f(1)g(n)$ szerepel, ahol $f(1) \neq 0$,

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.
Inverz: $f * g = e$-t akarjuk g-re megoldani. Ha $g(k)$ már megvan $k < n$-re, akkor $0 = e(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$-ből $g(n)$ kifejezhető, hiszen az összegben $f(1)g(n)$ szerepel, ahol $f(1) \neq 0$, a többi $f(d)g(\frac{n}{d})$ tag esetében pedig $g(\frac{n}{d})$ már ismert,

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.
Inverz: $f * g = e$-t akarjuk g-re megoldani. Ha $g(k)$ már megvan $k < n$-re, akkor $0 = e(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$-ből $g(n)$ kifejezhető, hiszen az összegben $f(1)g(n)$ szerepel, ahol $f(1) \neq 0$, a többi $f(d)g(\frac{n}{d})$ tag esetében pedig $g(\frac{n}{d})$ már ismert, mert $(n/d) < n$.

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.
Inverz: $f * g = e$-t akarjuk g-re megoldani. Ha $g(k)$ már megvan $k < n$-re, akkor $0 = e(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$-ből $g(n)$ kifejezhető, hiszen az összegben $f(1)g(n)$ szerepel, ahol $f(1) \neq 0$, a többi $f(d)g(\frac{n}{d})$ tag esetében pedig $g(\frac{n}{d})$ már ismert, mert $(n/d) < n$.
Multiplikativitás: Használjuk föl, hogy ha $(n, m) = 1$, akkor minden $d \mid mn$ egyértelműen írható $d = m'n'$ alakban,

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.
Inverz: $f * g = e$-t akarjuk g-re megoldani. Ha $g(k)$ már megvan $k < n$-re, akkor $0 = e(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$-ből $g(n)$ kifejezhető, hiszen az összegben $f(1)g(n)$ szerepel, ahol $f(1) \neq 0$, a többi $f(d)g(\frac{n}{d})$ tag esetében pedig $g(\frac{n}{d})$ már ismert, mert $(n/d) < n$.
Multiplikativitás: Használjuk föl, hogy ha $(n, m) = 1$, akkor minden $d \mid mn$ egyértelműen írható $d = m'n'$ alakban, ahol $m' \mid m$

A konvolúció tulajdonságai

Tétel (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a))

A konvolúció kommutatív és asszociatív, a pontonkénti összeadásra és a konvolúcióra nullosztómentes gyűrűt kapunk. Az e függvény egységelem. Az f pontosan akkor invertálható, ha $f(1) \neq 0$. Multiplikatív függvények konvolúciója is multiplikatív.

Asszociativitás: $(f * g) * h = f * (g * h) = \sum_{bcd=n} f(b)g(c)h(d)$.
Nullosztómentesség: Ha a, b a legkisebb, melyre $f(a) \neq 0 \neq g(b)$, akkor $(f * g)(ab) \neq 0$.
Inverz: $f * g = e$-t akarjuk g-re megoldani. Ha $g(k)$ már megvan $k < n$-re, akkor $0 = e(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$-ből $g(n)$ kifejezhető, hiszen az összegben $f(1)g(n)$ szerepel, ahol $f(1) \neq 0$, a többi $f(d)g(\frac{n}{d})$ tag esetében pedig $g(\frac{n}{d})$ már ismert, mert $(n/d) < n$.
Multiplikativitás: Használjuk föl, hogy ha $(n, m) = 1$, akkor minden $d \mid mn$ egyértelműen írható $d = m'n'$ alakban, ahol $m' \mid m$ és $n' \mid n$.

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív,

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is,

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni.

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$,

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k)$

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k) = 1 + (-1)$

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k) = 1 + (-1) = 0$. $\square$

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k) = 1 + (-1) = 0$. $\square$

Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2)

Ha $f^+ = g$, akkor $f = g * \mu$,

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k) = 1 + (-1) = 0$. $\square$

Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2)

Ha $f^+ = g$, akkor $f = g * \mu$, azaz $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$.

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k) = 1 + (-1) = 0$. $\square$

Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2)

Ha $f^+ = g$, akkor $f = g * \mu$, azaz $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$.
Speciálisan f pontosan akkor multiplikatív,ha f^+ az.

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k) = 1 + (-1) = 0$. □

Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2)

Ha $f^+ = g$, akkor $f = g * \mu$, azaz $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$.
Speciálisan f pontosan akkor multiplikatív,ha f^+ az.

Biz.: $g * \mu = (f * 1) * \mu$

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k) = 1 + (-1) = 0$. □

Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2)

Ha $f^+ = g$, akkor $f = g * \mu$, azaz $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$.
Speciálisan f pontosan akkor multiplikatív,ha f^+ az.

Biz.: $g * \mu = (f * 1) * \mu = f * (1 * \mu)$

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k) = 1 + (-1) = 0$. □

Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2)

Ha $f^+ = g$, akkor $f = g * \mu$, azaz $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$.
Speciálisan f pontosan akkor multiplikatív,ha f^+ az.

Biz.: $g * \mu = (f * 1) * \mu = f * (1 * \mu) = f * e$

Möbius-megfordítás

Adott g-re keressük azt az f függvényt, amelyre $f^+ = g$.

Lemma (FGy6.2.4)

Ha μ a Möbius-függvény, akkor $\mu^+ = e$.

Biz.: Láttuk, hogy $f^+ = f * 1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény.
Az azonosan 1 függvény nyilván totálisan multiplikatív.
Ezért μ^+ multiplikatív, és persze e is, tehát a $\mu^+ = e$ összefüggést elég a $p^k > 1$ prímhatványokra igazolni. Ekkor $e(p^k) = 0$, és
$\mu^+(p^k) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \ldots + \mu(p^k) = 1 + (-1) = 0.$ $\square$

Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2)

Ha $f^+ = g$, akkor $f = g * \mu$, azaz $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$.
Speciálisan f pontosan akkor multiplikatív,ha f^+ az.

Biz.: $g * \mu = (f * 1) * \mu = f * (1 * \mu) = f * e = f.$ $\square$

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét.

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$).

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege,

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$.

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet,

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök,

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^{+} = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök,

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^{+} = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök, és ez a $d \mid n$.

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök, és ez a $d \mid n$. De egyszerűbb a gyökök és együtthatók összefüggését alkalmazni.

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^{+} = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök, és ez a $d \mid n$. De egyszerűbb a gyökök és együtthatók összefüggését alkalmazni. Tekintsük az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben x^{n-1} együtthatóját.

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök, és ez a $d \mid n$. De egyszerűbb a gyökök és együtthatók összefüggését alkalmazni. Tekintsük az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben x^{n-1} együtthatóját. A bal oldalon ez -1, ha $n = 1$,

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^{+} = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök, és ez a $d \mid n$. De egyszerűbb a gyökök és együtthatók összefüggését alkalmazni. Tekintsük az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben x^{n-1} együtthatóját. A bal oldalon ez -1, ha $n = 1$, és 0, ha $n > 1$.

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök, és ez a $d \mid n$. De egyszerűbb a gyökök és együtthatók összefüggését alkalmazni. Tekintsük az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben x^{n-1} együtthatóját. A bal oldalon ez -1, ha $n = 1$, és 0, ha $n > 1$. Másrészt $f(d)$ a $\Phi_d(x)$ polinomban $x^{\varphi(n)-1}$ együtthatójának ellentettje.

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök, és ez a $d \mid n$. De egyszerűbb a gyökök és együtthatók összefüggését alkalmazni. Tekintsük az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben x^{n-1} együtthatóját. A bal oldalon ez -1, ha $n = 1$, és 0, ha $n > 1$. Másrészt $f(d)$ a $\Phi_d(x)$ polinomban $x^{\varphi(n)-1}$ együtthatójának ellentettje. A jobb oldali szorzatban x^{n-1}-es tagot úgy kaphatunk,

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök, és ez a $d \mid n$. De egyszerűbb a gyökök és együtthatók összefüggését alkalmazni. Tekintsük az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben x^{n-1} együtthatóját. A bal oldalon ez -1, ha $n = 1$, és 0, ha $n > 1$. Másrészt $f(d)$ a $\Phi_d(x)$ polinomban $x^{\varphi(n)-1}$ együtthatójának ellentettje. A jobb oldali szorzatban x^{n-1}-es tagot úgy kaphatunk, hogy egy kivételével mindegyik tényezőből a legmagasabb fokú tagot vesszük,

A primitív komplex egységgyökök összege

Tétel (FGy6.5.9, K3.9.18): Az n-edik primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.

Bizonyítás. Jelölje $f(n)$ az n-edik primitív egységgyökök összegét. Elég megmutatni, hogy $f^+ = e$ (mert akkor $f = e * \mu = \mu$). Ez abból következik, hogy $\sum_{d|n} f(d)$ az n-edik egységgyökök összege, amiről már láttuk, hogy $e(n)$. Ezt bizonyíthatnánk ugyanúgy, mint a $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képletet, megmutatva, hogy ha ε egy n-edik egységgyök, akkor egyetlen d-re lesz d-edik primitív egységgyök, és ez a $d \mid n$. De egyszerűbb a gyökök és együtthatók összefüggését alkalmazni. Tekintsük az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ összefüggésben x^{n-1} együtthatóját. A bal oldalon ez -1, ha $n = 1$, és 0, ha $n > 1$. Másrészt $f(d)$ a $\Phi_d(x)$ polinomban $x^{\varphi(n)-1}$ együtthatójának ellentettje. A jobb oldali szorzatban x^{n-1}-es tagot úgy kaphatunk, hogy egy kivételével mindegyik tényezőből a legmagasabb fokú tagot vesszük, a kivételesből pedig a második legmagasabb fokú tagot. $\square$

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell.

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)}$$

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1}$$

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 + 1.$$

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 + 1.$$

„Bizonyítás”: Az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ „logaritmusa” azt fejezi ki,

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 + 1.$$

„Bizonyítás”: Az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ „logaritmusa” azt fejezi ki, hogy $\log(x^n - 1)$ a $\log \Phi_n(x)$ összegezési függvénye.

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 + 1.$$

„Bizonyítás”: Az $x^n - 1 = \prod_{d|n}\Phi_d(x)$ „logaritmusa” azt fejezi ki, hogy $\log(x^n-1)$ a $\log\Phi_n(x)$ összegezési függvénye.
Ezért a tétel a Möbius-megfordítási formulából adódik.

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 + 1.$$

„Bizonyítás”: Az $x^n - 1 = \prod_{d|n}\Phi_d(x)$ „logaritmusa” azt fejezi ki, hogy $\log(x^n - 1)$ a $\log\Phi_n(x)$ összegezési függvénye.
Ezért a tétel a Möbius-megfordítási formulából adódik.

Precízen: legyen ε egy n-edik egységgyök,

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 + 1.$$

„Bizonyítás”: Az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ „logaritmusa” azt fejezi ki, hogy $\log(x^n - 1)$ a $\log \Phi_n(x)$ összegezési függvénye.
Ezért a tétel a Möbius-megfordítási formulából adódik.

Precízen: legyen ε egy n-edik egységgyök, $f_\varepsilon(n)$ az $(x - \varepsilon)$ kitevője $\Phi_n(x)$-ben,

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 + 1.$$

„Bizonyítás”: Az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ „logaritmusa” azt fejezi ki, hogy $\log(x^n - 1)$ a $\log \Phi_n(x)$ összegezési függvénye.
Ezért a tétel a Möbius-megfordítási formulából adódik.

Precízen: legyen ε egy n-edik egységgyök, $f_\varepsilon(n)$ az $(x-\varepsilon)$ kitevője $\Phi_n(x)$-ben, $g_\varepsilon(n)$ pedig $x^n - 1$-ben.

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 + 1.$$

„Bizonyítás”: Az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ „logaritmusa” azt fejezi ki, hogy $\log(x^n - 1)$ a $\log \Phi_n(x)$ összegezési függvénye.
Ezért a tétel a Möbius-megfordítási formulából adódik.

Precízen: legyen ε egy n-edik egységgyök, $f_\varepsilon(n)$ az $(x - \varepsilon)$ kitevője $\Phi_n(x)$-ben, $g_\varepsilon(n)$ pedig $x^n - 1$-ben. Ekkor $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ szerint $f_\varepsilon^+ = g_\varepsilon$.

Explicit képlet Φ_n-re

Tétel (K3.9.14)

$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

A képletet úgy kell érteni, hogy ha $\mu(n/d)$ negatív, akkor az $x^d - 1$ polinommal osztani kell. Például $\Phi_{12}(x)$ értéke

$$\frac{(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0(x^{12}-1)}{(x^6-1)(x^4-1)} = \frac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 + 1.$$

„Bizonyítás”: Az $x^n - 1 = \prod_{d|n}\Phi_d(x)$ „logaritmusa” azt fejezi ki, hogy $\log(x^n - 1)$ a $\log\Phi_n(x)$ összegezési függvénye.
Ezért a tétel a Möbius-megfordítási formulából adódik.

Precízen: legyen ε egy n-edik egységgyök, $f_\varepsilon(n)$ az $(x-\varepsilon)$ kitevője $\Phi_n(x)$-ben, $g_\varepsilon(n)$ pedig $x^n - 1$-ben. Ekkor $x^n - 1 = \prod_{d|n}\Phi_d(x)$ szerint $f_\varepsilon^+ = g_\varepsilon$. A tétel pedig azt mondja, hogy $f_\varepsilon = g_\varepsilon * \mu$. □

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$. A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke,

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$. A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \ldots$.

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a,b) számpároknak a száma, melyekre $1 \le a, b \le n$ és $(a,b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \le n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \ldots$.
Az egészrészek elhagyása kis hibát okoz n^2-hez képest,

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \ldots$.
Az egészrészek elhagyása kis hibát okoz n^2-hez képest, ezért ez körülbelül $n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$.

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \ldots$.
Az egészrészek elhagyása kis hibát okoz n^2-hez képest, ezért ez körülbelül $n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. (A Möbius-függvény biztosítja az előjeleket,

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \ldots$.
Az egészrészek elhagyása kis hibát okoz n^2-hez képest, ezért ez körülbelül $n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. (A Möbius-függvény biztosítja az előjeleket, és hogy csak négyzetmentes számok szerepeljenek az összegben.)

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a,b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a,b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \ldots$.
Az egészrészek elhagyása kis hibát okoz n^2-hez képest, ezért ez körülbelül $n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. (A Möbius-függvény biztosítja az előjeleket, és hogy csak négyzetmentes számok szerepeljenek az összegben.) Így a keresett valószínűség $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \ldots$.
Az egészrészek elhagyása kis hibát okoz n^2-hez képest, ezért ez körülbelül $n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. (A Möbius-függvény biztosítja az előjeleket, és hogy csak négyzetmentes számok szerepeljenek az összegben.) Így a keresett valószínűség $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.
Ez a végtelen sor konvergens,

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \ldots$.
Az egészrészek elhagyása kis hibát okoz n^2-hez képest, ezért ez körülbelül $n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. (A Möbius-függvény biztosítja az előjeleket, és hogy csak négyzetmentes számok szerepeljenek az összegben.) Így a keresett valószínűség $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.
Ez a végtelen sor konvergens, értéke $6/\pi^2 \approx 0.6079271$.

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \dots$.
Az egészrészek elhagyása kis hibát okoz n^2-hez képest, ezért ez körülbelül $n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. (A Möbius-függvény biztosítja az előjeleket, és hogy csak négyzetmentes számok szerepeljenek az összegben.) Így a keresett valószínűség $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.
Ez a végtelen sor konvergens, értéke $6/\pi^2 \approx 0.6079271$.
Ezt azzal fogjuk kapcsolatba hozni, hogy $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = \pi^2/6$.

Relatív prím számpárok

Mi a valószínűsége annak, hogy két egész szám relatív prím?

Heurisztikus gondolatmenet: Legyen $R(n)$ azoknak az (a, b) számpároknak a száma, melyekre $1 \leq a, b \leq n$ és $(a, b) = 1$.
A keresett valószínűség $R(n)/n^2$ határértéke, ha $n \to \infty$.
A $p \leq n$ prímre $\lfloor n/p \rfloor^2$ számpár tagjai oszthatók p-vel.
Ezért a szita-formula miatt a relatív prím párok száma
$n^2 - \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 + \sum_{p,q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor^2 - \sum_{p,q,r} \lfloor \frac{n}{pqr} \rfloor^2 + - \ldots$.
Az egészrészek elhagyása kis hibát okoz n^2-hez képest, ezért ez körülbelül $n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. (A Möbius-függvény biztosítja az előjeleket, és hogy csak négyzetmentes számok szerepeljenek az összegben.) Így a keresett valószínűség $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.
Ez a végtelen sor konvergens, értéke $6/\pi^2 \approx 0.6079271$.
Ezt azzal fogjuk kapcsolatba hozni, hogy $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = \pi^2/6$.
Tehát a számpárok több, mint fele relatív prím!

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$,

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2\big(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)\big) - 1$.

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2\big(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)\big) - 1$.

Indukcióval n szerint:

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2\big(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)\big) - 1$.
Indukcióval n szerint: ha a és b egyike $= n > 1$, akkor $2\varphi(n)$ ilyen pár van,

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2\big(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)\big) - 1$.
Indukcióval n szerint: ha a és b egyike $= n > 1$, akkor $2\varphi(n)$ ilyen pár van, hiszen $(n, n) \neq 1$.

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2\big(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)\big) - 1$.
Indukcióval n szerint: ha a és b egyike $= n > 1$, akkor $2\varphi(n)$ ilyen pár van, hiszen $(n, n) \neq 1$. Viszont $n = 1$-re $(1, 1)$ megfelelő. $\square$

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2\big(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)\big) - 1$.
Indukcióval n szerint: ha a és b egyike $= n > 1$, akkor $2\varphi(n)$ ilyen pár van, hiszen $(n, n) \neq 1$. Viszont $n = 1$-re $(1, 1)$ megfelelő. $\square$

Állítás (FGy6.5.8)

$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$.

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)) - 1$.
Indukcióval n szerint: ha a és b egyike $= n > 1$, akkor $2\varphi(n)$ ilyen pár van, hiszen $(n, n) \neq 1$. Viszont $n = 1$-re $(1, 1)$ megfelelő. $\square$

Állítás (FGy6.5.8)

$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$.

Valóban, $\frac{\varphi(n)}{n}$ is, $\frac{\mu(n)}{n}$ is multiplikatív függvény,

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)) - 1$.
Indukcióval n szerint: ha a és b egyike $= n > 1$, akkor $2\varphi(n)$ ilyen pár van, hiszen $(n, n) \neq 1$. Viszont $n = 1$-re $(1, 1)$ megfelelő. $\square$

Állítás (FGy6.5.8)

$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$.

Valóban, $\frac{\varphi(n)}{n}$ is, $\frac{\mu(n)}{n}$ is multiplikatív függvény, így az utóbbinak az összegezési függvénye is.

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)) - 1$.
Indukcióval n szerint: ha a és b egyike $= n > 1$, akkor $2\varphi(n)$ ilyen pár van, hiszen $(n, n) \neq 1$. Viszont $n = 1$-re $(1, 1)$ megfelelő. $\square$

Állítás (FGy6.5.8)

$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$.

Valóban, $\frac{\varphi(n)}{n}$ is, $\frac{\mu(n)}{n}$ is multiplikatív függvény, így az utóbbinak az összegezési függvénye is. Ezért az állítást elég a p^k prímhatványokra belátni.

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2\big(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)\big) - 1$.
Indukcióval n szerint: ha a és b egyike $= n > 1$, akkor $2\varphi(n)$ ilyen pár van, hiszen $(n, n) \neq 1$. Viszont $n = 1$-re $(1, 1)$ megfelelő. $\square$

Állítás (FGy6.5.8)

$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$.

Valóban, $\frac{\varphi(n)}{n}$ is, $\frac{\mu(n)}{n}$ is multiplikatív függvény, így az utóbbinak az összegezési függvénye is. Ezért az állítást elég a p^k prímhatványokra belátni. De ekkor mindkét oldal $1 - \frac{1}{p}$. $\square$

A precíz bizonyítás

Tétel (FGy6.7.5): Annak valószínűsége, hogy két egész szám relatív prím, a következő: $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = 6/\pi^2 \approx 0.6$.

Állítás. Azoknak az (a, b) pároknak a száma, melyekre $(a, b) = 1$ és $1 \leq a, b \leq n$, éppen $R(n) = 2(\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)) - 1$.
Indukcióval n szerint: ha a és b egyike $= n > 1$, akkor $2\varphi(n)$ ilyen pár van, hiszen $(n, n) \neq 1$. Viszont $n = 1$-re $(1, 1)$ megfelelő. □

Állítás (FGy6.5.8)

$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$.

Valóban, $\frac{\varphi(n)}{n}$ is, $\frac{\mu(n)}{n}$ is multiplikatív függvény, így az utóbbinak az összegezési függvénye is. Ezért az állítást elég a p^k prímhatványokra belátni. De ekkor mindkét oldal $1 - \frac{1}{p}$. □

Az állítást $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ beszorzásával is igazolhatjuk.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i)$

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k$

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$,

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1+2+\ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1+2+\dots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$,

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1+2+\dots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2|$

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i \le n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván
$\sum_{\{i:d|i \le n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \dots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény
$M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \le \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \le 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \le k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})|$

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \leq k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})| \leq 3(\frac{n}{d})$
a háromszög-egyenlőtlenség miatt.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i \leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i \leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \leq k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})| \leq 3(\frac{n}{d})$
a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor $|F - M| \leq (1/2) \sum_{d=1}^{n} |\mu(d)(\frac{3n}{d})|$

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \leq k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})| \leq 3(\frac{n}{d})$
a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor $|F - M| \leq (1/2) \sum_{d=1}^{n} |\mu(d)(\frac{3n}{d})| \leq (3n/2) \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i \leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván
$\sum_{\{i:d|i \leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény
$M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \leq k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})| \leq 3(\frac{n}{d})$
a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor
$|F - M| \leq (1/2) \sum_{d=1}^{n} |\mu(d)(\frac{3n}{d})| \leq (3n/2) \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$.
Analízis: $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \leq \log(n) + 1$.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván
$\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény
$M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \leq k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})| \leq 3(\frac{n}{d})$
a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor
$|F - M| \leq (1/2) \sum_{d=1}^{n} |\mu(d)(\frac{3n}{d})| \leq (3n/2) \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$.
Analízis: $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \leq \log(n) + 1$. Így $|F - M|$

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^n \varphi(i) = \sum_{i=1}^n i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^n \mu(d) \sum_{\{i:d|i\le n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\le n\}} \frac{i}{d} = 1+2+\ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \le \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \le 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \le k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})| \le 3(\frac{n}{d})$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor $|F - M| \le (1/2)\sum_{d=1}^n |\mu(d)(\frac{3n}{d})| \le (3n/2)\sum_{d=1}^n \frac{1}{d}$.
Analízis: $\sum_{d=1}^n \frac{1}{d} \le \log(n) + 1$. Így $|F - M| \le (3n/2)(\log n + 1)$.

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \leq k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})| \leq 3(\frac{n}{d})$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor $|F - M| \leq (1/2)\sum_{d=1}^{n} |\mu(d)(\frac{3n}{d})| \leq (3n/2)\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$.
Analízis: $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \leq \log(n) + 1$. Így $|F - M| \leq (3n/2)(\log n + 1)$.

$R(n) = 2F - 1$,

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván
$\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1 + 2 + \ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény
$M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \leq k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})| \leq 3(\frac{n}{d})$
a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor
$|F - M| \leq (1/2) \sum_{d=1}^{n} |\mu(d)(\frac{3n}{d})| \leq (3n/2) \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$.
Analízis: $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \leq \log(n) + 1$. Így $|F - M| \leq (3n/2)(\log n + 1)$.

$R(n) = 2F - 1$, így $|\frac{R(n)}{n^2} - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}|$

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\le n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\le n\}} \frac{i}{d} = 1+2+\ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \le \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \le 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \le k + |(k-\frac{n}{d})(k+\frac{n}{d})| \le 3(\frac{n}{d})$
a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor $|F-M| \le (1/2)\sum_{d=1}^{n} |\mu(d)(\frac{3n}{d})| \le (3n/2)\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$.
Analízis: $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \le \log(n)+1$. Így $|F-M| \le (3n/2)(\log n + 1)$.

$R(n) = 2F-1$, így $\left|\frac{R(n)}{n^2} - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| \le \big(3n(\log n+1)+1\big)/n^2$,

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1+2+\ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \leq k + |(k-\frac{n}{d})(k+\frac{n}{d})| \leq 3(\frac{n}{d})$
a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor $|F - M| \leq (1/2)\sum_{d=1}^{n} |\mu(d)(\frac{3n}{d})| \leq (3n/2)\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$.
Analízis: $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \leq \log(n) + 1$. Így $|F - M| \leq (3n/2)(\log n + 1)$.

$R(n) = 2F - 1$, így $\left|\frac{R(n)}{n^2} - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| \leq \big(3n(\log n + 1) + 1\big)/n^2$,
ami nullához tart,

Átfogalmazás $\mu(n)$-re*

Az előzőekből $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|i} \frac{\mu(d)}{d}$.
Ezt d szerint rendezve $\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d}$ adódik. Nyilván $\sum_{\{i:d|i\leq n\}} \frac{i}{d} = 1+2+\ldots k = k(k+1)/2$, ahol $k = \lfloor n/d \rfloor$.
Ha $k(k+1)/2$ helyett $(1/2)(\frac{n}{d})^2$-et írunk akkor az eredmény $M = (1/2)n^2 \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$. Becsüljük meg ennek eltérését F-től!

Mivel $k \leq \frac{n}{d} < k+1$, ezért $|k - \frac{n}{d}| \leq 1$.
Így $|k(k+1) - (\frac{n}{d})^2| \leq k + |(k - \frac{n}{d})(k + \frac{n}{d})| \leq 3(\frac{n}{d})$
a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ha ezeket összegezzük, akkor $|F - M| \leq (1/2)\sum_{d=1}^{n} |\mu(d)(\frac{3n}{d})| \leq (3n/2)\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$.
Analízis: $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \leq \log(n) + 1$. Így $|F - M| \leq (3n/2)(\log n + 1)$.

$R(n) = 2F - 1$, így $\left|\frac{R(n)}{n^2} - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| \leq \left(3n(\log n + 1) + 1\right)/n^2$, ami nullához tart, hiszen $\frac{\log n}{n} \to 0$, ha $n \to \infty$. $\square$

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor
$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók.

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért $D_f(s)D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right)$

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért
$D_f(s)D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}$.

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért $D_f(s)D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}$.
Vonjuk össze azokat a tagokat, ahol $nm = k$.

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s) D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért $D_f(s) D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}$.
Vonjuk össze azokat a tagokat, ahol $nm = k$. Ekkor $n^s m^s = k^s$,

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért $D_f(s)D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}$.
Vonjuk össze azokat a tagokat, ahol $nm = k$. Ekkor $n^s m^s = k^s$, így ez $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{nm=k} f(n)g(m)$

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s) D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért $D_f(s)D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}$.
Vonjuk össze azokat a tagokat, ahol $nm = k$. Ekkor $n^s m^s = k^s$, így ez $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{nm=k} f(n)g(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f*g)(k)}{k^s}$

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért $D_f(s)D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}$.
Vonjuk össze azokat a tagokat, ahol $nm = k$. Ekkor $n^s m^s = k^s$, így ez $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{nm=k} f(n)g(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f*g)(k)}{k^s} = D_{f*g}(s)$. $\square$

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért $D_f(s)D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}$.
Vonjuk össze azokat a tagokat, ahol $nm = k$. Ekkor $n^s m^s = k^s$, így ez $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{nm=k} f(n)g(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f*g)(k)}{k^s} = D_{f*g}(s)$. $\square$
Speciálisan $D_\mu(s)D_1(s) = D_{\mu*1}(s) = D_e(s) = 1$

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor
$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért
$D_f(s)D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}$.
Vonjuk össze azokat a tagokat, ahol $nm = k$. Ekkor $n^s m^s = k^s$,
így ez $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{nm=k} f(n)g(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f*g)(k)}{k^s} = D_{f*g}(s)$. $\square$
Speciálisan $D_\mu(s)D_1(s) = D_{\mu*1}(s) = D_e(s) = 1$ (ahol 1 az azonosan 1 függvény).

Dirichlet-sorok*

Definíció (FGy6.6.3)

Az f számelméleti függvényhez tartozó Dirichlet-sor
$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

Tétel (FGy6.6.4)

$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$, ha mindegyik sor abszolút konvergens.

Tudjuk, hogy abszolút konvergens sorok összeszorozhatók. Ezért
$D_f(s)D_g(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{g(m)}{m^s}$.
Vonjuk össze azokat a tagokat, ahol $nm = k$. Ekkor $n^s m^s = k^s$,
így ez $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{nm=k} f(n)g(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f*g)(k)}{k^s} = D_{f*g}(s)$. $\square$
Speciálisan $D_\mu(s)D_1(s) = D_{\mu*1}(s) = D_e(s) = 1$ (ahol 1 az azonosan 1 függvény). Azaz $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = 1$.

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény:

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény: $\zeta(s) = D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény: $\zeta(s) = D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Ennek igen szoros a kapcsolata a prímszámok eloszlásával.

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény: $\zeta(s) = D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Ennek igen szoros a kapcsolata a prímszámok eloszlásával. Analitikus módszerekkel kiterjeszthető $s = 1$ kivételével a teljes komplex számsíkra.

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény: $\zeta(s) = D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Ennek igen szoros a kapcsolata a prímszámok eloszlásával. Analitikus módszerekkel kiterjeszthető $s = 1$ kivételével a teljes komplex számsíkra. A matematika egyik leghíresebb problémája az alábbi sejtés,

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény: $\zeta(s) = D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Ennek igen szoros a kapcsolata a prímszámok eloszlásával. Analitikus módszerekkel kiterjeszthető $s = 1$ kivételével a teljes komplex számsíkra. A matematika egyik leghíresebb problémája az alábbi sejtés, amelynek sok mély számelméleti következménye lenne.

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény: $\zeta(s) = D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Ennek igen szoros a kapcsolata a prímszámok eloszlásával. Analitikus módszerekkel kiterjeszthető $s = 1$ kivételével a teljes komplex számsíkra. A matematika egyik leghíresebb problémája az alábbi sejtés, amelynek sok mély számelméleti következménye lenne.

Riemann-sejtés (F6.6)

A Riemann-függvény minden komplex gyöke vagy negatív egész, vagy a valós része $1/2$.

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény: $\zeta(s) = D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Ennek igen szoros a kapcsolata a prímszámok eloszlásával. Analitikus módszerekkel kiterjeszthető $s = 1$ kivételével a teljes komplex számsíkra. A matematika egyik leghíresebb problémája az alábbi sejtés, amelynek sok mély számelméleti következménye lenne.

Riemann-sejtés (F6.6)

A Riemann-függvény minden komplex gyöke vagy negatív egész, vagy a valós része $1/2$.

Analízisből látni fogjuk, hogy $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény: $\zeta(s) = D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Ennek igen szoros a kapcsolata a prímszámok eloszlásával. Analitikus módszerekkel kiterjeszthető $s = 1$ kivételével a teljes komplex számsíkra. A matematika egyik leghíresebb problémája az alábbi sejtés, amelynek sok mély számelméleti következménye lenne.

Riemann-sejtés (F6.6)

A Riemann-függvény minden komplex gyöke vagy negatív egész, vagy a valós része $1/2$.

Analízisből látni fogjuk, hogy $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$. Ezért a

$D_\mu(s) D_1(s) = 1$ összefüggés miatt

A Riemann-függvény

Definíció (FGy, F5.6.6)

A Riemann-féle zétafüggvény az azonosan 1 függvényhez tartozó Dirichlet-függvény: $\zeta(s) = D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Ennek igen szoros a kapcsolata a prímszámok eloszlásával. Analitikus módszerekkel kiterjeszthető $s = 1$ kivételével a teljes komplex számsíkra. A matematika egyik leghíresebb problémája az alábbi sejtés, amelynek sok mély számelméleti következménye lenne.

Riemann-sejtés (F6.6)

A Riemann-függvény minden komplex gyöke vagy negatív egész, vagy a valós része $1/2$.

Analízisből látni fogjuk, hogy $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$. Ezért a $D_\mu(s)D_1(s) = 1$ összefüggés miatt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = 6/\pi^2$.

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*.

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).
Összegezési függvény, konvolúció (FGy6.5.1, 6.6.1).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).
Összegezési függvény, konvolúció (FGy6.5.1, 6.6.1).
Dirichlet sor, Riemann-függvény (FGy6.6.3, F5.6.6).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).
Összegezési függvény, konvolúció (FGy6.5.1, 6.6.1).
Dirichlet sor, Riemann-függvény (FGy6.6.3, F5.6.6).

Tételek

A konvolúció tulajdonságai (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a)).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).
Összegezési függvény, konvolúció (FGy6.5.1, 6.6.1).
Dirichlet sor, Riemann-függvény (FGy6.6.3, F5.6.6).

Tételek

A konvolúció tulajdonságai (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a)).
Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).
Összegezési függvény, konvolúció (FGy6.5.1, 6.6.1).
Dirichlet sor, Riemann-függvény (FGy6.6.3, F5.6.6).

Tételek

A konvolúció tulajdonságai (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a)).
Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2).
A primitív egységgyökök összege (FGy6.5.9, K3.9.18).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).
Összegezési függvény, konvolúció (FGy6.5.1, 6.6.1).
Dirichlet sor, Riemann-függvény (FGy6.6.3, F5.6.6).

Tételek

A konvolúció tulajdonságai (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a)).
Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2).
A primitív egységgyökök összege (FGy6.5.9, K3.9.18).
Explicit képlet Φ_n-re (K3.9.14).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).
Összegezési függvény, konvolúció (FGy6.5.1, 6.6.1).
Dirichlet sor, Riemann-függvény (FGy6.6.3, F5.6.6).

Tételek

A konvolúció tulajdonságai (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a)).
Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2).
A primitív egységgyökök összege (FGy6.5.9, K3.9.18).
Explicit képlet Φ_n-re (K3.9.14).
A Dirichlet-sor és a konvolúció kapcsolata (FGy6.6.4).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).
Összegezési függvény, konvolúció (FGy6.5.1, 6.6.1).
Dirichlet sor, Riemann-függvény (FGy6.6.3, F5.6.6).

Tételek

A konvolúció tulajdonságai (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a)).
Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2).
A primitív egységgyökök összege (FGy6.5.9, K3.9.18).
Explicit képlet Φ_n-re (K3.9.14).
A Dirichlet-sor és a konvolúció kapcsolata (FGy6.6.4).
Annak valószínűsége, hogy két szám relatív prím (FGy6.7.5, NB).

A 29. előadás összefoglalója

Fogalmak

Additív és multiplikatív számelméleti függvény (FGy6.1.1–5).
$\omega(n)$ és $\Omega(n)$ (FGy6.2.5, 6.2.8)*. A Möbius-függvény (FGy6.2.3).
Összegezési függvény, konvolúció (FGy6.5.1, 6.6.1).
Dirichlet sor, Riemann-függvény (FGy6.6.3, F5.6.6).

Tételek

A konvolúció tulajdonságai (FGy6.6.2, F6.6.2, F6.6.4/(a)).
Möbius megfordítási formula (FGy6.5.2).
A primitív egységgyökök összege (FGy6.5.9, K3.9.18).
Explicit képlet Φ_n-re (K3.9.14).
A Dirichlet-sor és a konvolúció kapcsolata (FGy6.6.4).
Annak valószínűsége, hogy két szám relatív prím (FGy6.7.5, NB).
Riemann-sejtés (F6.6, NB).