Algebra és számelmélet

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Konzultáció: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

26. előadás

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n-edik egységgyök**, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n-edik egységgyök**, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n-edik egységgyök**, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.
Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n-nél kisebb,

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n-edik egységgyök**, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.
Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n-nél kisebb, mert a k/n törtet még egyszerűsíteni kell.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.
Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n-nél kisebb, mert a k/n törtet még egyszerűsíteni kell. Így (2) $\iff$ (3).

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök,

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n,

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1,

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.
(2) $\Longrightarrow$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n =$

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$

Rendje n, tehát n hatványa van.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1$.

Rendje n, tehát n hatványa van.

Így minden n-edik egységgyököt megkapunk. $\square$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. $\square$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k,n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. □

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez,

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k,n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.
Az i és a $-i$ hatványainak halmaza is $\{1, i, -1, -i\}$,

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k,n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.
Az i és a $-i$ hatványainak halmaza is $\{1, i, -1, -i\}$,
vagyis az összes negyedik egységgyökök.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. □

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.
Az i és a $-i$ hatványainak halmaza is $\{1, i, -1, -i\}$,
vagyis az összes negyedik egységgyökök.
A hatodik primitív egységgyökök

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k,n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.
Az i és a $-i$ hatványainak halmaza is $\{1, i, -1, -i\}$,
vagyis az összes negyedik egységgyökök.
A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.
Az i és a $-i$ hatványainak halmaza is $\{1, i, -1, -i\}$,
vagyis az összes negyedik egységgyökök.
A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. □

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.
Az i és a $-i$ hatványainak halmaza is $\{1, i, -1, -i\}$,
vagyis az összes negyedik egységgyökök.
A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5 \cdot 2\pi/6) + i\sin(5 \cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz,

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k,n) = 1$. $\square$

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.
Az i és a $-i$ hatványainak halmaza is $\{1, i, -1, -i\}$,
vagyis az összes negyedik egységgyökök.
A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz, de 0, 2, 3, 4 nem.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Állítás (K1.5.13)

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény).
Ezek $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k,n) = 1$. □

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.
Az i és a $-i$ hatványainak halmaza is $\{1, i, -1, -i\}$,
vagyis az összes negyedik egységgyökök.
A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz, de 0, 2, 3, 4 nem. $\varphi(6) = 2$.

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \ldots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \ldots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök,

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \ldots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \ldots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n.

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \ldots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \ldots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n.
Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök,
vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n.
Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

Példák:

$\Phi_1(x) = x - 1.$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n. Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

Példák:

$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n.
Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

Példák:

$\Phi_1(x) = x - 1.$ $\Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$

$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i))$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \ldots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \ldots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n.
Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

Példák:

$\Phi_1(x) = x - 1.$ $\quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$

$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n. Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

Példák:

$\Phi_1(x) = x - 1.$ $\quad$ $\Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$

$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n. Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

Példák:

$\Phi_1(x) = x - 1.$ $\quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$

$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = x^2 + x + 1.$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1)\dots(x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n. Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

Példák:

$\Phi_1(x) = x - 1.$ $\quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$

$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = x^2 + x + 1.$$

$$\Phi_6(x) = \left(x - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1)\dots(x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n. Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

Példák:

$\Phi_1(x) = x - 1.$ $\quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$

$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = x^2 + x + 1.$$

$$\Phi_6(x) = \left(x - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = x^2 - x + 1.$$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d \mid n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata,

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.
Nyilván $\varepsilon^n = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(\varepsilon) \mid n$.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.
Nyilván $\varepsilon^n = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(\varepsilon) \mid n$.
Ezért $x^n - 1$ gyöktényezői ugyanazok, mint a $\Phi_d(x)$ gyöktényezői együttvéve,

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.
Nyilván $\varepsilon^n = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(\varepsilon) \mid n$.
Ezért $x^n - 1$ gyöktényezői ugyanazok, mint a $\Phi_d(x)$ gyöktényezői együttvéve, ahol d befutja n osztóit.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.
Nyilván $\varepsilon^n = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(\varepsilon) \mid n$.
Ezért $x^n - 1$ gyöktényezői ugyanazok, mint a $\Phi_d(x)$ gyöktényezői együttvéve, ahol d befutja n osztóit.
Azt, hogy Φ_n egész együtthatós, n szerint indukcióval bizonyítjuk.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.
Nyilván $\varepsilon^n = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(\varepsilon) \mid n$.
Ezért $x^n - 1$ gyöktényezői ugyanazok, mint a $\Phi_d(x)$ gyöktényezői együttvéve, ahol d befutja n osztóit.
Azt, hogy Φ_n egész együtthatós, n szerint indukcióval bizonyítjuk.
A képletből $\Phi_n(x)$-et ki lehet fejezni osztással,

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.
Nyilván $\varepsilon^n = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(\varepsilon) \mid n$.
Ezért $x^n - 1$ gyöktényezői ugyanazok, mint a $\Phi_d(x)$ gyöktényezői együttvéve, ahol d befutja n osztóit.
Azt, hogy Φ_n egész együtthatós, n szerint indukcióval bizonyítjuk.
A képletből $\Phi_n(x)$-et ki lehet fejezni osztással, és mivel a nevezőben az indukciós feltevés szerint egész együtthatós, normált polinom áll,

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.
Nyilván $\varepsilon^n = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(\varepsilon) \mid n$.
Ezért $x^n - 1$ gyöktényezői ugyanazok, mint a $\Phi_d(x)$ gyöktényezői együttvéve, ahol d befutja n osztóit.
Azt, hogy Φ_n egész együtthatós, n szerint indukcióval bizonyítjuk.
A képletből $\Phi_n(x)$-et ki lehet fejezni osztással, és mivel a nevezőben az indukciós feltevés szerint egész együtthatós, normált polinom áll, a hányados is egész együtthatós. $\square$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.
Nyilván $\varepsilon^n = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(\varepsilon) \mid n$.
Ezért $x^n - 1$ gyöktényezői ugyanazok, mint a $\Phi_d(x)$ gyöktényezői együttvéve, ahol d befutja n osztóit.
Azt, hogy Φ_n egész együtthatós, n szerint indukcióval bizonyítjuk.
A képletből $\Phi_n(x)$-et ki lehet fejezni osztással, és mivel a nevezőben az indukciós feltevés szerint egész együtthatós, normált polinom áll, a hányados is egész együtthatós. $\square$

Példa: $\Phi_1(x)\Phi_3(x) = x^3 - 1$,

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, 3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.
Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Valóban, tudjuk, hogy $x^n - 1$ az $x - \varepsilon$ gyöktényezők szorzata, ahol ε befutja az n-edik egységgyököket.
Nyilván $\varepsilon^n = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(\varepsilon) \mid n$.
Ezért $x^n - 1$ gyöktényezői ugyanazok, mint a $\Phi_d(x)$ gyöktényezői együttvéve, ahol d befutja n osztóit.
Azt, hogy Φ_n egész együtthatós, n szerint indukcióval bizonyítjuk.
A képletből $\Phi_n(x)$-et ki lehet fejezni osztással, és mivel a nevezőben az indukciós feltevés szerint egész együtthatós, normált polinom áll, a hányados is egész együtthatós. □

Példa: $\Phi_1(x)\Phi_3(x) = x^3 - 1$, ezért $\Phi_3(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$.

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$.

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} =$$

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} =$$

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} =$$

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1\,.$$

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok,

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} .$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1 .$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

Példa: $\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2)$

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3 - 1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

Példa: $\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2) = x^2 + 1$,

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

Példa: $\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2) = x^2 + 1$, $\Phi_{12}(x) = \Phi_6(x^2)$

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

Példa: $\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2) = x^2 + 1$, $\Phi_{12}(x) = \Phi_6(x^2) = x^4 - x^2 + 1$.

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

Példa: $\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2) = x^2 + 1$, $\Phi_{12}(x) = \Phi_6(x^2) = x^4 - x^2 + 1$.

Ha p prím, akkor $\Phi_{p^k}(x)$

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3 - 1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

Példa: $\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2) = x^2 + 1$, $\Phi_{12}(x) = \Phi_6(x^2) = x^4 - x^2 + 1$.

Ha p prím, akkor $\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p(x^{p^{k-1}})$.

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

Példa: $\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2) = x^2 + 1$, $\Phi_{12}(x) = \Phi_6(x^2) = x^4 - x^2 + 1$.
Ha p prím, akkor $\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p(x^{p^{k-1}})$. Így $\Phi_{27}(x) = x^{18} + x^9 + 1$.

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

Példa: $\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2) = x^2 + 1$, $\Phi_{12}(x) = \Phi_6(x^2) = x^4 - x^2 + 1$.
Ha p prím, akkor $\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p(x^{p^{k-1}})$. Így $\Phi_{27}(x) = x^{18} + x^9 + 1$.
K3.9.12, HF: Ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

További módszerek

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}\,.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1\,.$$

Állítás (K3.9.15, NB)

Ha $m \mid n$, és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

Példa: $\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2) = x^2 + 1$, $\Phi_{12}(x) = \Phi_6(x^2) = x^4 - x^2 + 1$.
Ha p prím, akkor $\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p(x^{p^{k-1}})$. Így $\Phi_{27}(x) = x^{18} + x^9 + 1$.
K3.9.12, HF: Ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

Tétel (K3.9.9, nehéz)

Mindegyik körosztási polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ fölött.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$,

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q =$

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.
Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$,

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.
Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz
$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.
Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz
$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.
Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz
$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

(1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.
Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz
$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

(1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.

(2) Ezzel a problémát négyzetgyökvonásra vezettük vissza.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.
Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz
$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

(1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.

(2) Ezzel a problémát négyzetgyökvonásra vezettük vissza.

(3) Ha $p^2/4 - q \neq 0$, akkor két megoldás van,

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.
Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz
$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

(1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.

(2) Ezzel a problémát négyzetgyökvonásra vezettük vissza.

(3) Ha $p^2/4 - q \neq 0$, akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.
Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz
$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

(1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.

(2) Ezzel a problémát négyzetgyökvonásra vezettük vissza.

(3) Ha $p^2/4 - q \neq 0$, akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.

(4) Ha $p^2/4 - q = 0$, akkor egy megoldás van,

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan
$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$.
Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz
$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

(1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.

(2) Ezzel a problémát négyzetgyökvonásra vezettük vissza.

(3) Ha $p^2/4 - q \neq 0$, akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.

(4) Ha $p^2/4 - q = 0$, akkor egy megoldás van, amely az $y^2 + py + q$ polinomnak kétszeres gyöke.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben $(a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C})$.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).
Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az általános harmadfokú egyenlet.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben $(a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C})$.
Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az általános harmadfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3-mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).
Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az általános harmadfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3-mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.
Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).
Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az általános harmadfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3-mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.
Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.
Kiesik az x^2-es tag,

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).
Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az általános harmadfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3-mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.
Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.
Kiesik az x^2-es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben $(a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C})$.
Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az általános harmadfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3-mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.
Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.
Kiesik az x^2-es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).
Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az általános harmadfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3-mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.
Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.
Kiesik az x^2-es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A másodfokú egyenlet megoldását (geometriai módszerekkel) már az ókori görögök is ismerték.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben $(a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C})$.
Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az általános harmadfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3-mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.
Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.
Kiesik az x^2-es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A másodfokú egyenlet megoldását (geometriai módszerekkel) már az ókori görögök is ismerték. A most következő ötletet Scipione del Ferro és Niccolo Tartaglia fedezte fel, 1530 körül.

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v).$

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve,

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve,

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$$

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve, és $x = u + v$-t helyettesítve:

$$
\begin{aligned}
(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0 \\
x^3 \quad - \quad 3uvx \quad - (u^3+v^3) &= 0
\end{aligned}
$$

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve, és $x = u + v$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad - \quad 3uvx \quad - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad + \quad px \quad + \quad q &= 0 \end{aligned}$$

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve, és $x = u + v$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad - \quad 3uvx \quad - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad + \quad px \quad + \quad q &= 0 \end{aligned}$$

Vagyis HA $-3uv = p$

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve, és $x = u + v$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 - 3uvx - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 + px + q &= 0 \end{aligned}$$

Vagyis HA $-3uv = p$ és $-(u^3+v^3) = q$,

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.
Átrendezve, és $x = u + v$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned}(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0\\ x^3 - 3uvx - (u^3+v^3) &= 0\\ x^3 + px + q &= 0\end{aligned}$$

Vagyis HA $-3uv = p$ és $-(u^3+v^3) = q$,
AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve, és $x = u + v$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad - \quad 3uvx \quad - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad + \quad px \quad + \quad q &= 0 \end{aligned}$$

Vagyis HA $-3uv = p$ és $-(u^3+v^3) = q$,

AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$,

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve, és $x = u + v$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad - \quad 3uvx \quad - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad + \quad px \quad + \quad q &= 0 \end{aligned}$$

Vagyis HA $-3uv = p$ és $-(u^3+v^3) = q$,

AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$, és $u^3 + v^3 = -q$.

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve, és $x = u + v$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad - \quad 3uvx \quad - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad + \quad px \quad + \quad q &= 0 \end{aligned}$$

Vagyis HA $-3uv = p$ és $-(u^3+v^3) = q$,

AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$, és $u^3 + v^3 = -q$. Ezért u^3 és v^3 gyökei a $z^2 + qz - (p/3)^3 = 0$ másodfokú egyenletnek.

A megoldás ötlete*

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

Átrendezve, és $x = u+v$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad - \quad 3uvx \quad - (u^3+v^3) &= 0 \\ x^3 \quad + \quad px \quad + \quad q &= 0 \end{aligned}$$

Vagyis HA $-3uv = p$ és $-(u^3+v^3) = q$,
AKKOR $x = u+v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.
Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$, és $u^3+v^3 = -q$. Ezért u^3 és v^3 gyökei a $z^2 + qz - (p/3)^3 = 0$ másodfokú egyenletnek. Így

$$x = u+v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei Cardano képletéből kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei Cardano képletéből kaphatók:

$$x = u+v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl,

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei Cardano képletéből kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei Cardano képletéből kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

(1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei Cardano képletéből kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

(1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.

(2) Az f mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

(1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.

(2) Az f mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.

(3) Az f-nek pontosan akkor van többszörös gyöke, ha a négyzetgyök alatt álló $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ kifejezés nulla.

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei Cardano képletéből kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

(1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.

(2) Az f mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.

(3) Az f-nek pontosan akkor van többszörös gyöke, ha a négyzetgyök alatt álló $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ kifejezés nulla.

Bizonyítás: K, 3.8. Szakasz.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}\,.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}\,.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$,

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}\,.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}\,.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}\,.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}\,.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.

Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$,

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}\,.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.

Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.

Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$
$u_3 = u_1\varepsilon^2 =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$
$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.

Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$
$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i3\sqrt{3}/2$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$
$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i3\sqrt{3}/2$.
Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$
$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i3\sqrt{3}/2$.
Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$ és $x_3 = u_3 + v_3 = 1$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$
$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i3\sqrt{3}/2$.
Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$ és $x_3 = u_3 + v_3 = 1$.
Ellenőrzés: $(x - 1)(x - 4)(x + 5) =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ harmadik egységgyökökszörösei.
Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$
$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i3\sqrt{3}/2$.
Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$ és $x_3 = u_3 + v_3 = 1$.
Ellenőrzés: $(x - 1)(x - 4)(x + 5) = x^3 - 21x + 20$.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós,

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$,

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q valósak,

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q valósak, és $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q valósak, és $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

(1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q valósak, és $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

(1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.

(2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q valósak, és $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

(1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.

(2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.

(3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós,

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q valósak, és $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

(1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.

(2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.

(3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q valósak, és $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

(1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.

(2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.

(3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Az (1) esetben semmilyen más, valósban maradó „gyökképlet” sem adhatja egyik gyököt sem!

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke valós, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a Casus Irreducibilis. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q valósak, és $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

(1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.

(2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.

(3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Az (1) esetben semmilyen más, valósban maradó „gyökképlet” sem adhatja egyik gyököt sem! (A Casus Irreducibilis Tétele, K6.10.2).

A negyedfokú egyenlet*

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C})$.

A negyedfokú egyenlet*

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).
Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az általános negyedfokú egyenlet.

A negyedfokú egyenlet*

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).
Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az általános negyedfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4-gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.

A negyedfokú egyenlet*

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C})$.
Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az általános negyedfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4-gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.
Az $x \mapsto x - a_3/4$ helyettesítéssel kiesik az x^3-ös tag.

A negyedfokú egyenlet*

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C})$.
Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az általános negyedfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4-gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.
Az $x \mapsto x - a_3/4$ helyettesítéssel kiesik az x^3-ös tag.

Ötlet (K3.8.4, K3.8.5)

Egy harmadfokú egyenlet megoldásával a fenti polinom két másodfokú polinom szorzatára bontható.

A negyedfokú egyenlet*

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C})$.
Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az általános negyedfokú egyenlet.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4-gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.
Az $x \mapsto x - a_3/4$ helyettesítéssel kiesik az x^3-ös tag.

Ötlet (K3.8.4, K3.8.5)

Egy harmadfokú egyenlet megoldásával a fenti polinom két másodfokú polinom szorzatára bontható.
Ezért az összes gyök megkapható az együtthatókból a négy alapművelet és gyökvonás segítségével.

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az általános n-edfokú egyenletre nem létezik olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az általános n-edfokú egyenletre nem létezik olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az általános n-edfokú egyenletre nem létezik olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a Galois-elmélet eredményei.

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az általános n-edfokú egyenletre nem létezik olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a Galois-elmélet eredményei.
Felfedezők: Niels Henrik Abel,

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az általános n-edfokú egyenletre nem létezik olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a Galois-elmélet eredményei.

Felfedezők: Niels Henrik Abel, Evariste Galois (1830 körül).

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az általános n-edfokú egyenletre nem létezik olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a Galois-elmélet eredményei.
Felfedezők: Niels Henrik Abel, Evariste Galois (1830 körül).
Ezt az Algebra3-4 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet).

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az általános n-edfokú egyenletre nem létezik olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a Galois-elmélet eredményei.
Felfedezők: Niels Henrik Abel, Evariste Galois (1830 körül).
Ezt az Algebra3-4 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet).
Az elméletből következik, hogy bizonyos szerkesztések

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az általános n-edfokú egyenletre nem létezik olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a Galois-elmélet eredményei.
Felfedezők: Niels Henrik Abel, Evariste Galois (1830 körül).
Ezt az Algebra3-4 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet).
Az elméletből következik, hogy bizonyos szerkesztések (szögharmadolás, körnégyszögesítés)

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha $n \geq 5$, akkor az általános n-edfokú egyenletre nem létezik olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a Galois-elmélet eredményei.
Felfedezők: Niels Henrik Abel, Evariste Galois (1830 körül).
Ezt az Algebra3-4 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet).
Az elméletből következik, hogy bizonyos szerkesztések (szögharmadolás, körnégyszögesítés) nem végezhetők el körzővel és vonalzóval.

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

Tételek

A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

Tételek

A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).
A körosztási polinom rekurzív képlete (K3.9.5).

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

Tételek

A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).
A körosztási polinom rekurzív képlete (K3.9.5).
A körosztási polinom egész együtthatós (K3.9.7)

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

Tételek

A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).
A körosztási polinom rekurzív képlete (K3.9.5).
A körosztási polinom egész együtthatós (K3.9.7)
és irreducibilis (K3.9.9).

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

Tételek

A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).
A körosztási polinom rekurzív képlete (K3.9.5).
A körosztási polinom egész együtthatós (K3.9.7)
és irreducibilis (K3.9.9).
Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja,

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

Tételek

A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).
A körosztási polinom rekurzív képlete (K3.9.5).
A körosztási polinom egész együtthatós (K3.9.7)
és irreducibilis (K3.9.9).
Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja,
a többszörös gyökök létezésének leolvasása (K3.8.1-2).

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

Tételek

A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).
A körosztási polinom rekurzív képlete (K3.9.5).
A körosztási polinom egész együtthatós (K3.9.7)
és irreducibilis (K3.9.9).
Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja,
a többszörös gyökök létezésének leolvasása (K3.8.1-2).
A Casus Irreducibilis jelensége és tétele (K6.10.2).

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

Tételek

A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).
A körosztási polinom rekurzív képlete (K3.9.5).
A körosztási polinom egész együtthatós (K3.9.7)
és irreducibilis (K3.9.9).
Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja,
a többszörös gyökök létezésének leolvasása (K3.8.1-2).
A Casus Irreducibilis jelensége és tétele (K6.10.2).
A negyedfokú egyenlet* (K3.8.4, 3.8.5).

A 26. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Primitív n-edik egységgyök (K1.5.12).
Körosztási polinom (K3.9.1).

Tételek

A primitív egységgyökök jellemzései (K1.5.13).
A körosztási polinom rekurzív képlete (K3.9.5).
A körosztási polinom egész együtthatós (K3.9.7)
és irreducibilis (K3.9.9).
Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja,
a többszörös gyökök létezésének leolvasása (K3.8.1-2).
A Casus Irreducibilis jelensége és tétele (K6.10.2).
A negyedfokú egyenlet* (K3.8.4, 3.8.5). A magasabb fokú
egyenletek nem megoldhatósága gyökjelekkel (K6.9.7).