

# Algebra és számelmélet

## ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Konzultáció: Kiss Emil

<http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress>

[ewkiss@gmail.com](mailto:ewkiss@gmail.com)

21. előadás

# A gyöktényezős alak beszorzása

Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  
 $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ ,

# A gyöktényezős alak beszorzása

Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  
 $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ ,

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2$



# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x$

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) =$

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

# A gyöktényező alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényező alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

# A gyöktényező alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényező alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

# A gyöktényező alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényező alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$  és  $a_2b_1b_2 = a_0$ .

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$  és  $a_2b_1b_2 = a_0$ .

Innen  $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$



# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$  és  $a_2b_1b_2 = a_0$ .

Innen  $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$  és  $b_1b_2 = a_0/a_2$ .

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Legyen  $T$  test. Az  $f \in T[x]$  polinom **gyöktényezős alakja**  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ , ahol  $c, b_1, \dots, b_n \in T$ , és  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Komplex fölött minden polinom felírható így.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$  és  $a_2b_1b_2 = a_0$ .

Innen  $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$  és  $b_1b_2 = a_0/a_2$ .

Ez a **gyökök és együtthatók összefüggése**, ha  $n = 2$ . □

# A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

# A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk,

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk,  
ezeket összeszorozzuk,

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.



## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

$x^3$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$x^3$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$- b_1x^2$$

$$x^3$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$- b_1x^2 - b_2x^2$$

$$x^3$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$- b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

$$x^3$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$



## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből veszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből veszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x$

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x$

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$- b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3.$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből veszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből veszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3$ . Így

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3,$$



## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3$ . Így

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3,$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3,$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3$ . Így

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3,$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3,$$

$$b_1b_2b_3 = -a_0/a_3.$$

# A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorozott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből veszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből veszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3$ . Így

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3,$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3,$$

$$b_1b_2b_3 = -a_0/a_3.$$

Ez a gyökök és együtthatók összefüggése, ha  $n = 3$ . □

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.



# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ .

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 =$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3$$



# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5.$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5.$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5.$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (2/5)^2 - 2(3/5)$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét az egyenlet megoldása nélkül.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5.$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (2/5)^2 - 2(3/5) = -26/25. \quad \square$$

# Az általános eset

Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1}$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$



# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2}$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n$$

## Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon,

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n:$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk,

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk,

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.



# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

$x^{n-k}$ -s tag úgy keletkezik, hogy  $n - k$  zárójelből  $x$ -et,

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_j$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

$x^{n-k}$ -s tag úgy keletkezik, hogy  $n - k$  zárójelből  $x$ -et, a többi  $k$  zárójelből valamelyik  $-b_j$ -t vesszük ki.

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

$x^{n-k}$ -s tag úgy keletkezik, hogy  $n - k$  zárójelből  $x$ -et, a többi  $k$  zárójelből valamelyik  $-b_j$ -t vesszük ki.

Ezért  $x^{n-k}$  együtthatója  $(-1)^k \sigma_k$  lesz. □

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ :

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül,

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$ )

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)



# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

**Elnevezés:** elemi szimmetrikus polinom.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1) \dots (x - b_n)$ .

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1) \dots (x - b_n)$ .  
Ekkor  $0 \leq k \leq n$  esetén  $a_k = a_n(-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$ ,

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1) \dots (x - b_n)$ .  
Ekkor  $0 \leq k \leq n$  esetén  $a_k = a_n(-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$ ,

Az  $(x - b_1) \dots (x - b_n)$  beszorzott alakjából következik.

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk. (Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1)\dots(x - b_n)$ .

Ekkor  $0 \leq k \leq n$  esetén  $a_k = a_n(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$ , így

$$\sigma_k(b_1, \dots, b_n) = (-1)^k a_{n-k} / a_n.$$

Az  $(x - b_1)\dots(x - b_n)$  beszorzott alakjából következik.

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk. (Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1) \dots (x - b_n)$ .  
Ekkor  $0 \leq k \leq n$  esetén  $a_k = a_n(-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$ , így

$$\sigma_k(b_1, \dots, b_n) = (-1)^k a_{n-k} / a_n.$$

Ez a **gyökök és együtthatók összefüggése** (Viète-formulák). □

Az  $(x - b_1) \dots (x - b_n)$  beszorzott alakjából következik.

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

Állítás (K2.5.15)

$$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n),$$



# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

## Alkalmazás: az egységgyökök összege

### Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ ,

## Alkalmazás: az egységgyökök összege

### Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

## Alkalmazás: az egységgyökök összege

### Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.  
Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

**Valóban**, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.

De  $x^n - 1$  foka  $n$ ,

## Alkalmazás: az egységgyökök összege

### Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek. Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában. De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol  
 $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.  
Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.  
De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.  
Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző,

## Alkalmazás: az egységgyökök összege

### Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol  
 $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.  
Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.  
De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.  
Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.



# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol  
 $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

**Valóban**, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.  
Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.  
De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.  
Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.  
Az  $x^n - 1$  főegyütthatója  $1$ ,

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol  
 $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.  
Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.  
De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.  
Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.  
Az  $x^n - 1$  főegyütthatója  $1$ , ezért  $c = 1$ -gyel kell szorozni. □

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek. Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában. De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.

Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.

Az  $x^n - 1$  főegyütthatója  $1$ , ezért  $c = 1$ -gyel kell szorozni. □

## Következmény

Az  $n$ -edik egységgyökök összege nulla, ha  $n > 1$ ,

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol  
 $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

**Valóban**, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.  
Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.  
De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.  
Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.  
Az  $x^n - 1$  főegyütthatója  $1$ , ezért  $c = 1$ -gyel kell szorozni.  $\square$

## Következmény

Az  $n$ -edik egységgyökök összege nulla, ha  $n > 1$ ,

$$b_1 + \dots + b_n = \sigma_1(b_1, \dots, b_n) = (-1)^1 a_{n-1} / a_n.$$

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

**Valóban**, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek. Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában. De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.

Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.

Az  $x^n - 1$  főegyütthatója  $1$ , ezért  $c = 1$ -gyel kell szorozni. □

## Következmény

Az  $n$ -edik egységgyökök összege nulla, ha  $n > 1$ , mert ekkor  $x^n - 1$ -ben  $x^{n-1}$  együtthatója  $a_{n-1} = 0$ . □

$$b_1 + \dots + b_n = \sigma_1(b_1, \dots, b_n) = (-1)^1 a_{n-1} / a_n.$$

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból,

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül



# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás,

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás,

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás, szorzás segítségével.

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás, szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás, szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás, szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

Az eredmény:  $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ .

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás, szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

Az eredmény:  $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ .

## Definíció-kísérlet

$$\sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n},$$

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás, szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

Az eredmény:  $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ .

## Definíció-kísérlet

$\sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ , ahol  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n}$  egy szám.



# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

A **többhatározatlanú polinom** egy olyan formális kifejezés, amely számokból, és az  $x_1, x_2, \dots$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás, szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

Az eredmény:  $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ .

## Definíció-kísérlet

$\sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ , ahol  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n}$  egy szám.

Kényelmesebb a következő:

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2.$$

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2$

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2$

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ .

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,

## A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.



# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész,

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m$  az  $x_1$  polinomjai.

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m$  az  $x_1$  polinomjai.  
Általában, legyen  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű.

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában, legyen  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű.

Ekkor  $R[x_1, \dots, x_n]$ -et  $n$  szerinti indukcióval (rekurzióval)  
értelmezzük:

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában, legyen  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű.

Ekkor  $R[x_1, \dots, x_n]$ -et  $n$  szerinti indukcióval (rekurzióval)

értelmezzük:  $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$ ,

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában, legyen  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű.

Ekkor  $R[x_1, \dots, x_n]$ -et  $n$  szerinti indukcióval (rekurzióval)

értelmezzük:  $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$ , és így tovább,

$R[x_1, \dots, x_n] = (R[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n]$ .



# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában, legyen  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű.

Ekkor  $R[x_1, \dots, x_n]$ -et  $n$  szerinti indukcióval (rekurzióval)

értelmezzük:  $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$ , és így tovább,

$$R[x_1, \dots, x_n] = (R[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n].$$

Vagyis a határozatlan  $x_n$ ,

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában, legyen  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű.

Ekkor  $R[x_1, \dots, x_n]$ -et  $n$  szerinti indukcióval (rekurzióval)

értelmezzük:  $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$ , és így tovább,

$R[x_1, \dots, x_n] = (R[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n]$ .

Vagyis a határozatlan  $x_n$ , az együtthatók a már definiált  
 $n - 1$ -határozatlanú polinomok gyűrűjének elemei.

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2],$$

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2], \text{ sőt,}$$

$$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2],$$

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2], \text{ sőt,}$$

$$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2], \text{ mert minden együttható egész.}$$

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

Ha  $R$  nullosztómentes, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az,



# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

Ha  $R$  nullosztómentes, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az, és az invertálható elemei azok a konstans polinomok, amelyek  $R$ -ben invertálhatók.

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

Ha  $R$  nullosztómentes, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az, és az invertálható elemei azok a konstans polinomok, amelyek  $R$ -ben invertálhatók. (Nyilvánvaló  $n$  szerinti indukcióval.)

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

Ha  $R$  nullosztómentes, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az, és az invertálható elemei azok a konstans polinomok, amelyek  $R$ -ben invertálhatók. (Nyilvánvaló  $n$  szerinti indukcióval.)

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

Ha  $R$  nullosztómentes, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az, és az invertálható elemei azok a konstans polinomok, amelyek  $R$ -ben invertálhatók. (Nyilvánvaló  $n$  szerinti indukcióval.)

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

Ha  $R$  nullosztómentes, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az, és az invertálható elemei azok a konstans polinomok, amelyek  $R$ -ben invertálhatók. (Nyilvánvaló  $n$  szerinti indukcióval.)

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

Ha  $R$  nullosztómentes, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az, és az invertálható elemei azok a konstans polinomok, amelyek  $R$ -ben invertálhatók. (Nyilvánvaló  $n$  szerinti indukcióval.)

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka**

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

Ha  $R$  nullosztómentes, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az, és az invertálható elemei azok a konstans polinomok, amelyek  $R$ -ben invertálhatók. (Nyilvánvaló  $n$  szerinti indukcióval.)

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

# Műveletek, nullosztómentesség, fokszám

## Példák

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,

$y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

## Tétel (K2.6.2)

Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az.

Ha  $R$  nullosztómentes, akkor  $R[x_1, \dots, x_n]$  is az, és az invertálható elemei azok a konstans polinomok, amelyek  $R$ -ben invertálhatók. (Nyilvánvaló  $n$  szerinti indukcióval.)

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb. **Jele:**  $\text{gr}(f)$ .



# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) =$$

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) = 4 =$$

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2),$$

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$
$$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2), \text{ de } \text{gr}(x_1x_2) =$$

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$
$$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2), \text{ de } \text{gr}(x_1x_2) = 2 =$$

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2), \text{ de } \text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2).$$

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka 4:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .



# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka **4**:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva foka **2** és **nem**  $\text{gr}(f) = 4$ .

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka **4**:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva foka **2** és **nem**  $\text{gr}(f) = 4$ .

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka **4**:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva foka **2** és **nem**  $\text{gr}(f) = 4$ .

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka 4:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva foka 2 és **nem**  $\text{gr}(f) = 4$ .

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka 4:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva foka 2 és **nem**  $\text{gr}(f) = 4$ .

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka **4**:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva foka **2** és **nem**  $\text{gr}(f) = 4$ .

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok

összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .

Az  $f_j$  az  $f$  polinom  $j$ -edfokú tagjaiból áll.

# A fokszám tulajdonságai

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka **4**:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva foka **2** és **nem**  $\text{gr}(f) = 4$ .

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok

összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .

Az  $f_j$  az  $f$  polinom  $j$ -edfokú tagjaiból áll.

## Következmény (K2.6.3)

Szorzásnál a fokok összeadódnak:  $\text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$ . □

# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 =$



# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ .

# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Vagyis ha  
 $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 - 2y_2$ ,

# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Vagyis ha  $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 - 2y_2$ , akkor  $s_2 = F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ .

# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Vagyis ha  $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 - 2y_2$ , akkor  $s_2 = F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ .  
Tehát  $s_2$  az elemi szimmetrikus polinomok **polinomja**.

# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Vagyis ha  $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 - 2y_2$ , akkor  $s_2 = F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ .  
Tehát  $s_2$  az elemi szimmetrikus polinomok **polinomja**.

## Tétel (K2.7.3, NB)

Legyen  $R$  szokásos gyűrű.

# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Vagyis ha  $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 - 2y_2$ , akkor  $s_2 = F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ .  
Tehát  $s_2$  az elemi szimmetrikus polinomok **polinomja**.

## Tétel (K2.7.3, NB)

Legyen  $R$  szokásos gyűrű. Ekkor minden  $f \in R[x_1, \dots, x_n]$  szimmetrikus polinom **egyértelműen** fölírható

# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Vagyis ha  $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 - 2y_2$ , akkor  $s_2 = F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ .  
Tehát  $s_2$  az elemi szimmetrikus polinomok **polinomja**.

## Tétel (K2.7.3, NB)

Legyen  $R$  szokásos gyűrű. Ekkor minden  $f \in R[x_1, \dots, x_n]$  szimmetrikus polinom **egyértelműen** fölírható az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Vagyis ha  $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 - 2y_2$ , akkor  $s_2 = F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ . Tehát  $s_2$  az elemi szimmetrikus polinomok **polinomja**.

## Tétel (K2.7.3, NB)

Legyen  $R$  szokásos gyűrű. Ekkor minden  $f \in R[x_1, \dots, x_n]$  szimmetrikus polinom **egyértelműen** fölírható az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Azaz létezik pontosan egy  $F \in R[y_1, \dots, y_n]$  polinom, melyre

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$



# A szimmetrikus polinomok alaptétele

## Példa

A négyzetösszeg:  $s_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Vagyis ha  $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 - 2y_2$ , akkor  $s_2 = F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ . Tehát  $s_2$  az elemi szimmetrikus polinomok **polinomja**.

## Tétel (K2.7.3, NB)

Legyen  $R$  szokásos gyűrű. Ekkor minden  $f \in R[x_1, \dots, x_n]$  szimmetrikus polinom **egyértelműen** fölírható az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Azaz létezik pontosan egy  $F \in R[y_1, \dots, y_n]$  polinom, melyre

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

A  $F$  együtthatói a  $f$  együtthatóiból összeadás és kivonás segítségével kaphatók.

# A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).

## A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok,  
homogén polinom (K2.6.1).

## A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok,  
homogén polinom (K2.6.1).

### Tételek

A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák, K2.5.9).

## A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok,  
homogén polinom (K2.6.1).

### Tételek

A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák, K2.5.9).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus  
polinomokkal (K2.5.13).

## A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok,  
homogén polinom (K2.6.1).

### Tételek

A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák, K2.5.9).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus  
polinomokkal (K2.5.13).  
Az  $x^n - 1$  gyöktényezős alakja (K2.5.15),

## A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok,  
homogén polinom (K2.6.1).

### Tételek

A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák, K2.5.9).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal (K2.5.13).  
Az  $x^n - 1$  gyöktényező alakja (K2.5.15),  
az  $n$ -edik egységgyökök összege.

## A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok,  
homogén polinom (K2.6.1).

### Tételek

A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák, K2.5.9).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal (K2.5.13).  
Az  $x^n - 1$  gyöktényező alakja (K2.5.15),  
az  $n$ -edik egységgyökök összege.  
Nullosztómentesség többhatározatlanú polinomokra (K2.6.1).



## A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok,  
homogén polinom (K2.6.1).

### Tételek

A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák, K2.5.9).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal (K2.5.13).  
Az  $x^n - 1$  gyöktényezős alakja (K2.5.15),  
az  $n$ -edik egységgyökök összege.  
Nullosztómentesség többhatározatlanú polinomokra (K2.6.1).  
Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka (K2.6.3).

## A 21. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok (K2.5.8).  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok,  
homogén polinom (K2.6.1).

### Tételek

A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák, K2.5.9).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal (K2.5.13).  
Az  $x^n - 1$  gyöktényező alakja (K2.5.15),  
az  $n$ -edik egységgyökök összege.  
Nullosztómentesség többhatározatlanú polinomokra (K2.6.1).  
Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka (K2.6.3).  
A szimmetrikus polinomok alaptétele (K2.7.3, NB).