Algebra és számelmélet

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Konzultáció: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

20. előadás

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.
Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.
Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Ha a-nak van egy b inverze, akkor legyen $a^{-n} = b^n$.

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.
Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Ha a-nak van egy b inverze, akkor legyen $a^{-n} = b^n$.
Ha a-nak van egy b ellentettje, akkor legyen $(-n)a = nb$.

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.
Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Ha a-nak van egy b inverze, akkor legyen $a^{-n} = b^n$.
Ha a-nak van egy b ellentettje, akkor legyen $(-n)a = nb$.

Értelmeztük az egész kitevőjű hatvány (többszörös) fogalmát.

Hatvány és többszörös

Definíció (K2.2.19)

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.
Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Ha a-nak van egy b inverze, akkor legyen $a^{-n} = b^n$.
Ha a-nak van egy b ellentettje, akkor legyen $(-n)a = nb$.

Értelmeztük az egész kitevőjű hatvány (többszörös) fogalmát.
Így minden gyűrű elemeit tudjuk egész számokkal „szorozni”.

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív,

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve,

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok.

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b felcserélhetők ($ab = ba$),

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b felcserélhetők ($ab = ba$), akkor $(ab)^n = a^n b^n$.

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b felcserélhetők ($ab = ba$), akkor $(ab)^n = a^n b^n$.

Az analóg állítások érvényesek hatvány helyett többszörösre is.

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b felcserélhetők ($ab = ba$), akkor $(ab)^n = a^n b^n$.

Az analóg állítások érvényesek hatvány helyett többszörösre is.

Bizonyítás

Pozitív kitevőkre egyszerű leszámlálás.

A hatványozás tulajdonságai

Állítás (K2.2.20)

Legyenek a és b invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b felcserélhetők ($ab = ba$), akkor $(ab)^n = a^n b^n$.

Az analóg állítások érvényesek hatvány helyett többszörösre is.

Bizonyítás

Pozitív kitevőkre egyszerű leszámlálás.
A többi esetben esetszétválasztás (HF). $\square$

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám,

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla.

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$:

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben.

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben. Egyszerű számelméleti megfontolás, hogy a $\binom{p}{j}$ binomiális együttható osztható p-vel, ha $1 \leq j \leq p-1$. $\square$

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben. Egyszerű számelméleti megfontolás, hogy a $\binom{p}{j}$ binomiális együttható osztható p-vel, ha $1 \leq j \leq p-1$. $\square$

Alkalmazás

$\mathbb{Z}_p$-ben $2^p = (1+1)^p$

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben. Egyszerű számelméleti megfontolás, hogy a $\binom{p}{j}$ binomiális együttható osztható p-vel, ha $1 \le j \le p-1$. $\square$

Alkalmazás

$\mathbb{Z}_p$-ben $2^p = (1+1)^p = 1^p + 1^p$

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben. Egyszerű számelméleti megfontolás, hogy a $\binom{p}{j}$ binomiális együttható osztható p-vel, ha $1 \le j \le p-1$. $\square$

Alkalmazás

$\mathbb{Z}_p$-ben $2^p = (1+1)^p = 1^p + 1^p = 1 + 1$

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben. Egyszerű számelméleti megfontolás, hogy a $\binom{p}{j}$ binomiális együttható osztható p-vel, ha $1 \leq j \leq p-1$. $\square$

Alkalmazás

$\mathbb{Z}_p$-ben $2^p = (1+1)^p = 1^p + 1^p = 1 + 1 = 2$.

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben. Egyszerű számelméleti megfontolás, hogy a $\binom{p}{j}$ binomiális együttható osztható p-vel, ha $1 \leq j \leq p-1$. $\square$

Alkalmazás

$\mathbb{Z}_p$-ben $2^p = (1+1)^p = 1^p + 1^p = 1 + 1 = 2$. Azaz $p \mid 2^p - 2$.

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben. Egyszerű számelméleti megfontolás, hogy a $\binom{p}{j}$ binomiális együttható osztható p-vel, ha $1 \leq j \leq p-1$. $\square$

Alkalmazás

$\mathbb{Z}_p$-ben $2^p = (1+1)^p = 1^p + 1^p = 1+1 = 2$. Azaz $p \mid 2^p - 2$.
Ugyanígy $3^p = (1+1+1)^p$

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben. Egyszerű számelméleti megfontolás, hogy a $\binom{p}{j}$ binomiális együttható osztható p-vel, ha $1 \leq j \leq p-1$. $\square$

Alkalmazás

$\mathbb{Z}_p$-ben $2^p = (1+1)^p = 1^p + 1^p = 1+1 = 2$. Azaz $p \mid 2^p - 2$.
Ugyanígy $3^p = (1+1+1)^p = 1^p + 1^p + 1^p = 3$.

Tagonkénti hatványozás

Állítás (K3.3.22)

Legyen p prímszám, és R olyan kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Ekkor $r, s \in R$ esetén $(r+s)^p = r^p + s^p$: tagonként lehet p-edik hatványra emelni.

Bizonyítás

A binomiális tétel alkalmazható minden kommutatív gyűrűben. Egyszerű számelméleti megfontolás, hogy a $\binom{p}{j}$ binomiális együttható osztható p-vel, ha $1 \leq j \leq p-1$. $\square$

Alkalmazás

$\mathbb{Z}_p$-ben $2^p = (1+1)^p = 1^p + 1^p = 1 + 1 = 2$. Azaz $p \mid 2^p - 2$.
Ugyanígy $3^p = (1+1+1)^p = 1^p + 1^p + 1^p = 3$.
HF: belátni a kis Fermat-tételt.

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.
R fölötti egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket,

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.
R fölötti egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket,
ahol $n \geq 0$ egész szám

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.
R fölötti egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket,
ahol $n \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_n \in R$.

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.
R fölötti egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket, ahol $n \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_n \in R$. Ezek halmaza $R[x]$.

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.
R fölötti egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket, ahol $n \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_n \in R$. Ezek halmaza $R[x]$.

Egyenlőség (K2.1.1)

Két polinom egyenlő, ha megfelelő együtthatóik megegyeznek

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.
R fölötti egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket,
ahol $n \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_n \in R$. Ezek halmaza $R[x]$.

Egyenlőség (K2.1.1)

Két polinom egyenlő, ha megfelelő együtthatóik megegyeznek
(x^j együtthatója ugyanaz a két polinomban minden $j \geq 0$-ra).

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.
R fölötti egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket, ahol $n \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_n \in R$. Ezek halmaza $R[x]$.

Egyenlőség (K2.1.1)

Két polinom egyenlő, ha megfelelő együtthatóik megegyeznek (x^j együtthatója ugyanaz a két polinomban minden $j \geq 0$-ra).

Nullapolinom

A nullapolinom az a polinom, amelynek minden együtthatója nulla.

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.
R fölötti egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket, ahol $n \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_n \in R$. Ezek halmaza $R[x]$.

Egyenlőség (K2.1.1)

Két polinom egyenlő, ha megfelelő együtthatóik megegyeznek (x^j együtthatója ugyanaz a két polinomban minden $j \geq 0$-ra).

Nullapolinom

A nullapolinom az a polinom, amelynek minden együtthatója nulla. Ugyanúgy 0 jelöli, mint az R nullelemét.

A polinom definíciója

Polinom (K2.1. szakasz)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű.
R fölötti egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket, ahol $n \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_n \in R$. Ezek halmaza $R[x]$.

Egyenlőség (K2.1.1)

Két polinom egyenlő, ha megfelelő együtthatóik megegyeznek (x^j együtthatója ugyanaz a két polinomban minden $j \geq 0$-ra).

Nullapolinom

A nullapolinom az a polinom, amelynek minden együtthatója nulla. Ugyanúgy 0 jelöli, mint az R nullelemét.
Minden $c \in R$ elemet konstans polinomnak tekintünk.

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1}$$

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2}$$

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots .$$

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots .$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots .$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.
Így bármely két polinomot ugyanannyi taggal írhatunk fel.

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots .$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.
Így bármely két polinomot ugyanannyi taggal írhatunk fel.

Összeg és különbség

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots .$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.
Így bármely két polinomot ugyanannyi taggal írhatunk fel.

Összeg és különbség

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots .$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.
Így bármely két polinomot ugyanannyi taggal írhatunk fel.

Összeg és különbség

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

összege és különbsége:

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots .$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.
Így bármely két polinomot ugyanannyi taggal írhatunk fel.

Összeg és különbség

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

összege és különbsége:

$$(f+g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

Polinomok összege, különbsége

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots .$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.
Így bármely két polinomot ugyanannyi taggal írhatunk fel.

Összeg és különbség

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

összege és különbsége:

$$(f+g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$
$$(f-g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n.$$

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h,

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$.

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Szorzat

$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$-ben
x^k együtthatója legyen

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Szorzat

$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$-ben
x^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Szorzat

$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$-ben
x^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.

Azaz $(fg)(x) = \sum\limits_{k=0}^{m+n} c_kx^k$,

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Szorzat

$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$-ben
x^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.
Azaz $(fg)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_kx^k$, ahol $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}$

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Szorzat

$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$-ben
x^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.
Azaz $(fg)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_kx^k$, ahol $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j} = \sum_{j+\ell=k} a_jb_\ell$.

Polinomok ellentettje és szorzata

Ellentett

Az $f \in R[x]$ ellentettje h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Szorzat

$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$-ben
x^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.
Azaz $(fg)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_kx^k$, ahol $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j} = \sum_{j+\ell=k} a_jb_\ell$.

Tétel (K2.1.6, K2.3.2)

$R[x]$ is egységelemes, kommutatív gyűrű ezekre a műveletekre.

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$,

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$,

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n.

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$.

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Tétel (K2.1.5, K2.3.2)

Ha R nullosztómentes gyűrű, akkor

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Tétel (K2.1.5, K2.3.2)

Ha R nullosztómentes gyűrű, akkor $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Tétel (K2.1.5, K2.3.2)

Ha R nullosztómentes gyűrű, akkor $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.
Így ha R nullosztómentes, akkor $R[x]$ is az.

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Tétel (K2.1.5, K2.3.2)

Ha R nullosztómentes gyűrű, akkor $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.
Így ha R nullosztómentes, akkor $R[x]$ is az.

Bizonyítás

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Tétel (K2.1.5, K2.3.2)

Ha R nullosztómentes gyűrű, akkor $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.
Így ha R nullosztómentes, akkor $R[x]$ is az.

Bizonyítás

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Tétel (K2.1.5, K2.3.2)

Ha R nullosztómentes gyűrű, akkor $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.
Így ha R nullosztómentes, akkor $R[x]$ is az.

Bizonyítás

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ szorzatában x^{n+m} együtthatója a_nb_m.

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Tétel (K2.1.5, K2.3.2)

Ha R nullosztómentes gyűrű, akkor $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.
Így ha R nullosztómentes, akkor $R[x]$ is az.

Bizonyítás

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ szorzatában x^{n+m} együtthatója a_nb_m.
Ez nem nulla, ha a_n és b_m nem nulla, mert R nullosztómentes. $\square$

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Tétel (K2.1.5, K2.3.2)

Ha R nullosztómentes gyűrű, akkor $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.
Így ha R nullosztómentes, akkor $R[x]$ is az.

Bizonyítás

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ szorzatában x^{n+m} együtthatója a_nb_m.
Ez nem nulla, ha a_n és b_m nem nulla, mert R nullosztómentes. $\square$
Megjegyzés: Szorzásnál a főegyütthatók és a konstans tagok is összeszorzódnak,

Polinom foka

Definíció

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f foka n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. A nullapolinomnak nincs foka.

Tétel (K2.1.5, K2.3.2)

Ha R nullosztómentes gyűrű, akkor $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.
Így ha R nullosztómentes, akkor $R[x]$ is az.

Bizonyítás

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ szorzatában x^{n+m} együtthatója a_nb_m.
Ez nem nulla, ha a_n és b_m nem nulla, mert R nullosztómentes. □
Megjegyzés: Szorzásnál a főegyütthatók és a konstans tagok is összeszorzódnak, hiszen fg konstans tagja nyilván a_0b_0.

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$,

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek,

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz:

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is:

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem,

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység:

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység: van inverze.

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység: van inverze.

Tétel (K2.3.2)

Ha R (egységelemes, kommutatív és) nullosztómentes, akkor az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység,

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység: van inverze.

Tétel (K2.3.2)

Ha R (egységelemes, kommutatív és) nullosztómentes, akkor az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom,

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység: van inverze.

Tétel (K2.3.2)

Ha R (egységelemes, kommutatív és) nullosztómentes, akkor az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység: van inverze.

Tétel (K2.3.2)

Ha R (egységelemes, kommutatív és) nullosztómentes, akkor az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

Bizonyítás

Ha $fg = 1$,

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység: van inverze.

Tétel (K2.3.2)

Ha R (egységelemes, kommutatív és) nullosztómentes, akkor az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

Bizonyítás

Ha $fg = 1$, akkor $\mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g) = 0$,

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység: van inverze.

Tétel (K2.3.2)

Ha R (egységelemes, kommutatív és) nullosztómentes, akkor az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

Bizonyítás

Ha $fg = 1$, akkor $\mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g) = 0$, így f és g konstans.

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység: van inverze.

Tétel (K2.3.2)

Ha R (egységelemes, kommutatív és) nullosztómentes, akkor az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

Bizonyítás

Ha $fg = 1$, akkor $\mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g) = 0$, így f és g konstans.
Megfordítva: ha $c \in R$ egység,

A polinomgyűrű egységei

Definíció

Legyen R egységelemes gyűrű és $r, s \in R$.
Ha $rs = 1$, akkor r balinverze s-nek, s jobbinverze r-nek.
(Kétoldali) inverz: balinverz és jobbinverz is: $rs = sr = 1$.
Invertálható elem, vagy egység: van inverze.

Tétel (K2.3.2)

Ha R (egységelemes, kommutatív és) nullosztómentes, akkor az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

Bizonyítás

Ha $fg = 1$, akkor $\mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g) = 0$, így f és g konstans.
Megfordítva: ha $c \in R$ egység, akkor $1/c \in R[x]$. $\square$

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in R[x]$
polinom b helyen felvett helyettesítési értéke

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in R[x]$
polinom b helyen felvett helyettesítési értéke
$f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n \in R$.

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in R[x]$
polinom b helyen felvett helyettesítési értéke
$f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n \in R$.
Az $f^* : R \mapsto R$ az f-hez tartozó polinomfüggvény.

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in R[x]$
polinom b helyen felvett helyettesítési értéke
$f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n \in R$.
Az $f^* : R \mapsto R$ az f-hez tartozó polinomfüggvény.
Az $f^*(b)$ kiszámítása: Horner elrendezéssel.

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.
Az $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$
polinom b helyen felvett helyettesítési értéke
$f^*(b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n \in R$.
Az $f^* : R \mapsto R$ az f-hez tartozó polinomfüggvény.
Az $f^*(b)$ kiszámítása: Horner elrendezéssel.
A b gyöke f-nek, ha $f^*(b) = 0$.

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in R[x]$
polinom b helyen felvett helyettesítési értéke
$f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n \in R$.
Az $f^* : R \mapsto R$ az f-hez tartozó polinomfüggvény.
Az $f^*(b)$ kiszámítása: Horner elrendezéssel.
A b gyöke f-nek, ha $f^*(b) = 0$.

A gyöktényező kiemelhetősége (K2.4.6)

A $b \in R$ akkor és csak akkor gyöke az $f \in R[x]$-nek,
ha van olyan $q \in R[x]$, hogy

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in R[x]$
polinom b helyen felvett helyettesítési értéke
$f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n \in R$.
Az $f^* : R \mapsto R$ az f-hez tartozó polinomfüggvény.
Az $f^*(b)$ kiszámítása: Horner elrendezéssel.
A b gyöke f-nek, ha $f^*(b) = 0$.

A gyöktényező kiemelhetősége (K2.4.6)

A $b \in R$ akkor és csak akkor gyöke az $f \in R[x]$-nek,
ha van olyan $q \in R[x]$, hogy $f(x) = (x - b)q(x)$.

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in R[x]$
polinom b helyen felvett helyettesítési értéke
$f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n \in R$.
Az $f^* : R \mapsto R$ az f-hez tartozó polinomfüggvény.
Az $f^*(b)$ kiszámítása: Horner elrendezéssel.
A b gyöke f-nek, ha $f^*(b) = 0$.

A gyöktényező kiemelhetősége (K2.4.6)

A $b \in R$ akkor és csak akkor gyöke az $f \in R[x]$-nek,
ha van olyan $q \in R[x]$, hogy $f(x) = (x - b)q(x)$.
Az $x - b$ a b gyökhöz tartozó gyöktényező.

Behelyettesítés polinomba

Polinomfüggvény (K2.4.1)

Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $b \in R$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in R[x]$
polinom b helyen felvett helyettesítési értéke
$f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n \in R$.
Az $f^* : R \mapsto R$ az f-hez tartozó polinomfüggvény.
Az $f^*(b)$ kiszámítása: Horner elrendezéssel.
A b gyöke f-nek, ha $f^*(b) = 0$.

A gyöktényező kiemelhetősége (K2.4.6)

A $b \in R$ akkor és csak akkor gyöke az $f \in R[x]$-nek,
ha van olyan $q \in R[x]$, hogy $f(x) = (x - b)q(x)$.
Az $x - b$ a b gyökhöz tartozó gyöktényező.
Bizonyítás: Horner-elrendezéssel.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1)\ldots(x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\mathrm{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\mathrm{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:
$f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\mathrm{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:
$f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$, ahol q-nak már nincs gyöke.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\mathrm{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:
$f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak már nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \dots, b_k$.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\mathrm{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:
$f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$, ahol q-nak már nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \dots, b_k$.
Valóban: ha $f^*(b) = 0$,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\mathrm{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:
$f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak már nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \dots, b_k$.
Valóban: ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \dots (b - b_k)q^*(b) = 0$.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\mathrm{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:
$f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$, ahol q-nak már nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \dots, b_k$.
Valóban: ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \dots (b - b_k) q^*(b) = 0$.
A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\mathrm{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:
$f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak már nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \ldots, b_k$.
Valóban: ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \ldots (b - b_k)q^*(b) = 0$.
A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla.
De $q^*(b) \neq 0$,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\operatorname{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:
$f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$, ahol q-nak már nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \dots, b_k$.
Valóban: ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \dots (b - b_k) q^*(b) = 0$.
A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla.
De $q^*(b) \neq 0$, ezért $b - b_j = 0$ valamelyik j-re.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel a gyöktényezők egyszerre kiemelhetőségéről (K2.4.7)

Ha R (kommutatív, egységelemes és) nullosztómentes, akkor minden $0 \neq f \in R[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k \in R$ az f-nek az összes R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

A bizonyítás kulcslépése

Addig emelünk ki gyöktényezőket, ameddig lehet.
Legfeljebb $\mathrm{gr}(f)$ lépésben biztosan megállunk:
$f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak már nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \dots, b_k$.
Valóban: ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \dots (b - b_k)q^*(b) = 0$.
A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla.
De $q^*(b) \neq 0$, ezért $b - b_j = 0$ valamelyik j-re. Azaz $b = b_j$. $\square$

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.
$x = 3$ helyettesítéssel

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.
$x = 3$ helyettesítéssel $\quad 3^2 - 1$

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.
$x = 3$ helyettesítéssel $0 = 3^2 - 1$

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.
$x = 3$ helyettesítéssel $0 = 3^2 - 1 = (3-1)(3+1)$

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.
$x = 3$ helyettesítéssel $0 = 3^2 - 1 = (3-1)(3+1) = 4 *_8 2$.

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.
$x = 3$ helyettesítéssel $0 = 3^2 - 1 = (3 - 1)(3 + 1) = 4 *_8 2$.
Vagyis a probléma az, hogy $\mathbb{Z}_8$ nem nullosztómentes.

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.
$x = 3$ helyettesítéssel $0 = 3^2 - 1 = (3-1)(3+1) = 4 *_8 2$.
Vagyis a probléma az, hogy $\mathbb{Z}_8$ nem nullosztómentes.
Ugyanígy $x^2 - 1 = (x-3)(x+3)$ is teljesül,

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.
$x = 3$ helyettesítéssel $0 = 3^2 - 1 = (3-1)(3+1) = 4 *_8 2$.
Vagyis a probléma az, hogy $\mathbb{Z}_8$ nem nullosztómentes.
Ugyanígy $x^2 - 1 = (x-3)(x+3)$ is teljesül,
azaz a gyöktényezős alak nem egyértelmű.

Gyöktényező a nem nullosztómentes esetben

Példa (K, 57. oldal)

Legyen $R = \mathbb{Z}_8$ és $f(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinom.
A $\mathbb{Z}_8$ gyűrű 8 elemét végigpróbálgatva a gyökök $1, 3, 5, 7$.
(Páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1-et ad maradékul.)
Azaz egy másodfokú polinomnak négy gyöke van.

Magyarázat

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)q(x)$, ahol a $q(x) = 1$-nek nincs gyöke.
$x = 3$ helyettesítéssel $0 = 3^2 - 1 = (3 - 1)(3 + 1) = 4 *_8 2$.
Vagyis a probléma az, hogy $\mathbb{Z}_8$ nem nullosztómentes.
Ugyanígy $x^2 - 1 = (x - 3)(x + 3)$ is teljesül,
azaz a gyöktényezős alak nem egyértelmű.

A négy különböző gyökhöz tartozó gyöktényezőt egyszerre azért nem lehet kiemelni, mert $\mathbb{Z}_8$ nem nullosztómentes.

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik,

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű,

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű, és az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők,

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű, és az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$.

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű, és az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Ha R véges,

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű, és az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Ha R véges, akkor van két különböző polinom, melyek polinomfüggvénye ugyanaz.

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű, és az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Ha R véges, akkor van két különböző polinom, melyek polinomfüggvénye ugyanaz.

A bizonyítások megjegyzendő fő gondolatai:

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű, és az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Ha R véges, akkor van két különböző polinom, melyek polinomfüggvénye ugyanaz.

A bizonyítások megjegyzendő fő gondolatai:

(1) Egyszerre kiemelhetők a gyöktényezők.

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű, és az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Ha R véges, akkor van két különböző polinom, melyek polinomfüggvénye ugyanaz.

A bizonyítások megjegyzendő fő gondolatai:

(1) Egyszerre kiemelhetők a gyöktényezők.

(2) Alkalmazzuk (1)-et a két polinom különbségére.

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű, és az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Ha R véges, akkor van két különböző polinom, melyek polinomfüggvénye ugyanaz.

A bizonyítások megjegyzendő fő gondolatai:

(1) Egyszerre kiemelhetők a gyöktényezők.

(2) Alkalmazzuk (1)-et a két polinom különbségére.

(3) Ha R végtelen, akkor (2)-ben van „elég” elem.

A gyökök száma

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10, K2.4.11)

Ha R kommutatív, egységelemes és nullosztómentes:

(1) Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

(2) Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

(3) Ha R végtelen gyűrű, és az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Ha R véges, akkor van két különböző polinom, melyek polinomfüggvénye ugyanaz.

A bizonyítások megjegyzendő fő gondolatai:

(1) Egyszerre kiemelhetők a gyöktényezők.

(2) Alkalmazzuk (1)-et a két polinom különbségére.

(3) Ha R végtelen, akkor (2)-ben van „elég" elem.
Véges gyűrű fölött csak véges sok polinomfüggvény van.

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$,

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz:

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1. Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

$\mathbb{Z}_p$ fölött $x^{p-1} - 1 = (x-1)\dots(x-(p-1))$.

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

$\mathbb{Z}_p$ fölött $x^{p-1} - 1 = (x-1)\dots(x-(p-1))$.
Valóban: $\mathbb{Z}_p$ test,

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

$\mathbb{Z}_p$ fölött $x^{p-1} - 1 = (x-1)\dots(x-(p-1))$.
Valóban: $\mathbb{Z}_p$ test, a két oldal különbsége legfeljebb $p-2$ fokú,

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

$\mathbb{Z}_p$ fölött $x^{p-1} - 1 = (x-1)\ldots(x-(p-1))$.
Valóban: $\mathbb{Z}_p$ test, a két oldal különbsége legfeljebb $p-2$ fokú, mert x^{p-1} kiesik,

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

$\mathbb{Z}_p$ fölött $x^{p-1} - 1 = (x-1)\dots(x-(p-1))$.
Valóban: $\mathbb{Z}_p$ test, a két oldal különbsége legfeljebb $p-2$ fokú, mert x^{p-1} kiesik, de az $1, 2, \dots, p-1$ helyeken megegyeznek.

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

$\mathbb{Z}_p$ fölött $x^{p-1} - 1 = (x-1)\ldots(x-(p-1))$.
Valóban: $\mathbb{Z}_p$ test, a két oldal különbsége legfeljebb $p-2$ fokú, mert x^{p-1} kiesik, de az $1, 2, \ldots, p-1$ helyeken megegyeznek.
Másképp: az $x - i$ gyöktényezőket egyszerre kiemeljük ($1 \leq i < p$).

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

$\mathbb{Z}_p$ fölött $x^{p-1} - 1 = (x-1)\dots(x-(p-1))$.
Valóban: $\mathbb{Z}_p$ test, a két oldal különbsége legfeljebb $p-2$ fokú, mert x^{p-1} kiesik, de az $1, 2, \dots, p-1$ helyeken megegyeznek.
Másképp: az $x - i$ gyöktényezőket egyszerre kiemeljük ($1 \leq i < p$).

HF: Lássuk be ebből Wilson tételét:

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

$\mathbb{Z}_p$ fölött $x^{p-1} - 1 = (x-1)\ldots(x-(p-1))$.
Valóban: $\mathbb{Z}_p$ test, a két oldal különbsége legfeljebb $p-2$ fokú, mert x^{p-1} kiesik, de az $1, 2, \ldots, p-1$ helyeken megegyeznek.
Másképp: az $x - i$ gyöktényezőket egyszerre kiemeljük ($1 \leq i < p$).

HF: Lássuk be ebből Wilson tételét: $p \mid (p-1)! + 1$, ha p prím.

Véges gyűrű fölötti polinomfüggvények

Példa

Ha $R = \mathbb{Z}_2$ és $k \geq 1$, akkor x^k értéke $x = 0$-nál 0 és $x = 1$-nél 1.
Ezért az x^k-hoz tartozó polinomfüggvény ugyanaz: az identitás.

Legyen $R = \mathbb{Z}_p$ ahol p prím.
Ekkor az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény ugyanaz.
Valóban: A kis Fermat-tétel szerint $p \mid x^p - x$ minden x egészre.

$\mathbb{Z}_p$ fölött $x^{p-1} - 1 = (x-1)\dots(x-(p-1))$.
Valóban: $\mathbb{Z}_p$ test, a két oldal különbsége legfeljebb $p-2$ fokú, mert x^{p-1} kiesik, de az $1, 2, \dots, p-1$ helyeken megegyeznek.
Másképp: az $x - i$ gyöktényezőket egyszerre kiemeljük ($1 \leq i < p$).

HF: Lássuk be ebből Wilson tételét: $p \mid (p-1)! + 1$, ha p prím.
Ötlet: $x = 0$ helyettesítés.

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) deriváltja

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) **deriváltja** $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) **deriváltja** $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Magyarázat (K3.6.3 előtti rész)

Deriváláskor az f függvényt az $\ell(x) = cx + d$ érintőjével szeretnénk közelíteni egy b pontban,

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) **deriváltja** $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Magyarázat (K3.6.3 előtti rész)

Deriváláskor az f függvényt az $\ell(x) = cx + d$ érintőjével szeretnénk közelíteni egy b pontban, és $f'(b)$ definíció szerint ennek a c iránytangense.

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) deriváltja $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Magyarázat (K3.6.3 előtti rész)

Deriváláskor az f függvényt az $\ell(x) = cx + d$ érintőjével szeretnénk közelíteni egy b pontban, és $f'(b)$ definíció szerint ennek a c iránytangense. A közelítés akkor „másodrendben jó”, ha $f(b+x) - \ell(b+x)$-ből, mint x polinomjából kiesik a konstans és az elsőfokú tag.

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) **deriváltja** $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Magyarázat (K3.6.3 előtti rész)

Deriváláskor az f függvényt az $\ell(x) = cx + d$ érintőjével szeretnénk közelíteni egy b pontban, és $f'(b)$ definíció szerint ennek a c iránytangense. A közelítés akkor „másodrendben jó", ha $f(b+x) - \ell(b+x)$-ből, mint x polinomjából kiesik a konstans és az elsőfokú tag. De $\ell(b+x) = c(b+x) + d$-ben az x együtthatója $c = f'(b)$.

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) deriváltja $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Magyarázat (K3.6.3 előtti rész)

Deriváláskor az f függvényt az $\ell(x) = cx + d$ érintőjével szeretnénk közelíteni egy b pontban, és $f'(b)$ definíció szerint ennek a c iránytangense. A közelítés akkor „másodrendben jó”, ha $f(b+x) - \ell(b+x)$-ből, mint x polinomjából kiesik a konstans és az elsőfokú tag. De $\ell(b+x) = c(b+x) + d$-ben az x együtthatója $c = f'(b)$. Azaz $f'(b)$ az x együtthatója az $f(b+x)$ polinomban.

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) deriváltja $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Magyarázat (K3.6.3 előtti rész)

Deriváláskor az f függvényt az $\ell(x) = cx + d$ érintőjével szeretnénk közelíteni egy b pontban, és $f'(b)$ definíció szerint ennek a c iránytangense. A közelítés akkor „másodrendben jó", ha $f(b+x) - \ell(b+x)$-ből, mint x polinomjából kiesik a konstans és az elsőfokú tag. De $\ell(b+x) = c(b+x) + d$-ben az x együtthatója $c = f'(b)$. Azaz $f'(b)$ az x együtthatója az $f(b+x)$ polinomban. Másképp: $f(b+x) - f(b)$-t osztjuk x-szel,

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) deriváltja $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Magyarázat (K3.6.3 előtti rész)

Deriváláskor az f függvényt az $\ell(x) = cx + d$ érintőjével szeretnénk közelíteni egy b pontban, és $f'(b)$ definíció szerint ennek a c iránytangense. A közelítés akkor „másodrendben jó”, ha $f(b+x) - \ell(b+x)$-ből, mint x polinomjából kiesik a konstans és az elsőfokú tag. De $\ell(b+x) = c(b+x) + d$-ben az x együtthatója $c = f'(b)$. Azaz $f'(b)$ az x együtthatója az $f(b+x)$ polinomban. Másképp: $f(b+x) - f(b)$-t osztjuk x-szel, majd $x = 0$-t helyettesítünk.

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) deriváltja $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}$.

Magyarázat (K3.6.3 előtti rész)

Deriváláskor az f függvényt az $\ell(x) = cx + d$ érintőjével szeretnénk közelíteni egy b pontban, és $f'(b)$ definíció szerint ennek a c iránytangense. A közelítés akkor „másodrendben jó”, ha $f(b+x) - \ell(b+x)$-ből, mint x polinomjából kiesik a konstans és az elsőfokú tag. De $\ell(b+x) = c(b+x) + d$-ben az x együtthatója $c = f'(b)$. Azaz $f'(b)$ az x együtthatója az $f(b+x)$ polinomban. Másképp: $f(b+x) - f(b)$-t osztjuk x-szel, majd $x = 0$-t helyettesítünk. Ebből nemcsak a fenti definíció adódik közvetlenül,

A derivált definíciója

Definíció (K3.6.1)

Ha R szokásos gyűrű, akkor $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ (formális) deriváltja $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Magyarázat (K3.6.3 előtti rész)

Deriváláskor az f függvényt az $\ell(x) = cx + d$ érintőjével szeretnénk közelíteni egy b pontban, és $f'(b)$ definíció szerint ennek a c iránytangense. A közelítés akkor „másodrendben jó”, ha $f(b+x) - \ell(b+x)$-ből, mint x polinomjából kiesik a konstans és az elsőfokú tag. De $\ell(b+x) = c(b+x) + d$-ben az x együtthatója $c = f'(b)$. Azaz $f'(b)$ az x együtthatója az $f(b+x)$ polinomban. Másképp: $f(b+x) - f(b)$-t osztjuk x-szel, majd $x = 0$-t helyettesítünk. Ebből nemcsak a fenti definíció adódik közvetlenül, hanem a deriválás szokásos azonosságai is.

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$,

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$,

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott,

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$,

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x}$$

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} =$$

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{y} \cdot \frac{y}{x}.$$

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{y} \cdot \frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x = 0$ helyen $(f \circ g)'(b)$.

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:
Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{y} \cdot \frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x = 0$ helyen $(f \circ g)'(b)$. A szorzat első tényezője $f'(c) + yh(y)$ alakban írható alkalmas $h(y)$ polinomra.

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{y} \cdot \frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x = 0$ helyen $(f \circ g)'(b)$. A szorzat első tényezője $f'(c) + yh(y)$ alakban írható alkalmas $h(y)$ polinomra.
$x = 0$-t helyettesítve y-ból 0 lesz,

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{y} \cdot \frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x = 0$ helyen $(f \circ g)'(b)$. A szorzat első tényezője $f'(c) + yh(y)$ alakban írható alkalmas $h(y)$ polinomra. $x = 0$-t helyettesítve y-ból 0 lesz, ezért $f'(c) = f'\big(g(b)\big)$ adódik.

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:

Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{y} \cdot \frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x = 0$ helyen $(f \circ g)'(b)$. A szorzat első tényezője $f'(c) + yh(y)$ alakban írható alkalmas $h(y)$ polinomra. $x = 0$-t helyettesítve y-ból 0 lesz, ezért $f'(c) = f'\big(g(b)\big)$ adódik. Végül $y/x = \big(g(b+x) - g(b)\big)/x$

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:
Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{y} \cdot \frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x = 0$ helyen $(f \circ g)'(b)$. A szorzat első tényezője $f'(c) + yh(y)$ alakban írható alkalmas $h(y)$ polinomra.
$x = 0$-t helyettesítve y-ból 0 lesz, ezért $f'(c) = f'\big(g(b)\big)$ adódik.
Végül $y/x = \big(g(b+x) - g(b)\big)/x$ az $x = 0$ helyen $g'(b)$-t ad. $\square$

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=f'g+fg'$, $f\big(g(x)\big)'=f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:
Legyen f, g, b adott, $c=g(b)$, és $y=g(b+x)-g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big)-f\big(g(b)\big)}{x}=\frac{f(c+y)-f(c)}{x}=\frac{f(c+y)-f(c)}{y}\cdot\frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x=0$ helyen $(f\circ g)'(b)$. A szorzat első tényezője $f'(c)+yh(y)$ alakban írható alkalmas $h(y)$ polinomra. $x=0$-t helyettesítve y-ból 0 lesz, ezért $f'(c)=f'\big(g(b)\big)$ adódik. Végül $y/x=\big(g(b+x)-g(b)\big)/x$ az $x=0$ helyen $g'(b)$-t ad. □

Tétel (K3.6.3): Ha $f\in R[x]$-nek $b\in R$ legalább k-szoros gyöke

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:
Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{y} \cdot \frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x = 0$ helyen $(f \circ g)'(b)$. A szorzat első tényezője $f'(c) + yh(y)$ alakban írható alkalmas $h(y)$ polinomra. $x = 0$-t helyettesítve y-ból 0 lesz, ezért $f'(c) = f'\big(g(b)\big)$ adódik. Végül $y/x = \big(g(b+x) - g(b)\big)/x$ az $x = 0$ helyen $g'(b)$-t ad. $\square$

Tétel (K3.6.3): Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ legalább k-szoros gyöke ($k \geq 1$),

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:
Legyen f, g, b adott, $c = g(b)$, és $y = g(b+x) - g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big) - f\big(g(b)\big)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{x} = \frac{f(c+y) - f(c)}{y} \cdot \frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x = 0$ helyen $(f \circ g)'(b)$. A szorzat első tényezője $f'(c) + yh(y)$ alakban írható alkalmas $h(y)$ polinomra. $x = 0$-t helyettesítve y-ból 0 lesz, ezért $f'(c) = f'\big(g(b)\big)$ adódik. Végül $y/x = \big(g(b+x) - g(b)\big)/x$ az $x = 0$ helyen $g'(b)$-t ad. $\square$

Tétel (K3.6.3): Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ legalább k-szoros gyöke ($k \geq 1$), akkor b az f' deriváltnak legalább $k-1$-szeres gyöke.

Többszörös gyökök és a derivált

HF: Igazoljuk közvetlen számolással a deriválás azonosságait:
$(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=f'g+fg'$, $f\big(g(x)\big)'=f'\big(g(x)\big)g'(x)$.

A láncszabály bizonyítása az analízishez hasonlóan:
Legyen f, g, b adott, $c=g(b)$, és $y=g(b+x)-g(b)$.

$$\frac{f\big(g(b+x)\big)-f\big(g(b)\big)}{x}=\frac{f(c+y)-f(c)}{x}=\frac{f(c+y)-f(c)}{y}\cdot\frac{y}{x}.$$

A bal oldal értéke az $x=0$ helyen $(f\circ g)'(b)$. A szorzat első tényezője $f'(c)+yh(y)$ alakban írható alkalmas $h(y)$ polinomra. $x=0$-t helyettesítve y-ból 0 lesz, ezért $f'(c)=f'\big(g(b)\big)$ adódik. Végül $y/x=\big(g(b+x)-g(b)\big)/x$ az $x=0$ helyen $g'(b)$-t ad. $\square$

Tétel (K3.6.3): Ha $f\in R[x]$-nek $b\in R$ legalább k-szoros gyöke $(k\geq 1)$, akkor b az f' deriváltnak legalább $k-1$-szeres gyöke.

$$f(x)=(x-b)^k g(x)\implies f'(x)=(x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)].$$

Gyök multiplicitása a deriváltban

$$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x) + (x-b)g'(x)].$$

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x) + (x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x) + (x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x) + (x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x) + (x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$),

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x) + (x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$),
és $kg(b) \neq 0$,

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x) + (x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$), és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke.

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$), és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke.
Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x) + (x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$), és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke.
Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Ha b pontosan k-szoros gyöke f-nek, akkor $g(b) \neq 0$.

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$), és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke. Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Ha b pontosan k-szoros gyöke f-nek, akkor $g(b) \neq 0$. A deriváltnak b akkor pontosan k-szoros gyöke,

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$), és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke. Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Ha b pontosan k-szoros gyöke f-nek, akkor $g(b) \neq 0$. A deriváltnak b akkor pontosan k-szoros gyöke, ha $kg(x) + (x-b)g'(x)$-be b-t helyettesítve nem nulla az eredmény.

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$), és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke. Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Ha b pontosan k-szoros gyöke f-nek, akkor $g(b) \neq 0$. A deriváltnak b akkor pontosan k-szoros gyöke, ha $kg(x) + (x-b)g'(x)$-be b-t helyettesítve nem nulla az eredmény. Azaz, ha $kg(b) \neq 0$. $\square$

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$), és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke. Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Ha b pontosan k-szoros gyöke f-nek, akkor $g(b) \neq 0$. A deriváltnak b akkor pontosan k-szoros gyöke, ha $kg(x) + (x-b)g'(x)$-be b-t helyettesítve nem nulla az eredmény. Azaz, ha $kg(b) \neq 0$. □

Példák

$x^6 - x^5 = x^5(x+1) \in \mathbb{Z}_5[x]$-nek $b = 0$ ötszörös gyöke.

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$), és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke. Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Ha b pontosan k-szoros gyöke f-nek, akkor $g(b) \neq 0$. A deriváltnak b akkor pontosan k-szoros gyöke, ha $kg(x) + (x-b)g'(x)$-be b-t helyettesítve nem nulla az eredmény. Azaz, ha $kg(b) \neq 0$. $\square$

Példák

$x^6 - x^5 = x^5(x+1) \in \mathbb{Z}_5[x]$-nek $b = 0$ ötszörös gyöke.
A deriváltja $6x^5 - 5x^4 = x^5$,

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$),
és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke.
Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Ha b pontosan k-szoros gyöke f-nek, akkor $g(b) \neq 0$. A deriváltnak b akkor pontosan k-szoros gyöke, ha $kg(x) + (x-b)g'(x)$-be b-t helyettesítve nem nulla az eredmény. Azaz, ha $kg(b) \neq 0$. $\square$

Példák

$x^6 - x^5 = x^5(x+1) \in \mathbb{Z}_5[x]$-nek $b = 0$ ötszörös gyöke.
A deriváltja $6x^5 - 5x^4 = x^5$, ennek is ötszörös gyöke.

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$),
és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke.
Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Ha b pontosan k-szoros gyöke f-nek, akkor $g(b) \neq 0$. A deriváltnak b akkor pontosan k-szoros gyöke, ha $kg(x) + (x-b)g'(x)$-be b-t helyettesítve nem nulla az eredmény. Azaz, ha $kg(b) \neq 0$. $\square$

Példák

$x^6 - x^5 = x^5(x+1) \in \mathbb{Z}_5[x]$-nek $b = 0$ ötszörös gyöke.
A deriváltja $6x^5 - 5x^4 = x^5$, ennek is ötszörös gyöke.
Ennek deriváltja a nullapolinom,

Gyök multiplicitása a deriváltban

$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies f'(x) = (x-b)^{k-1}[kg(x)+(x-b)g'(x)]$.
Így a többszörös gyökök az (f, f') KKO-nak is gyökei (algoritmus).

Tétel (K3.6.5.)

Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ pontosan k-szoros gyöke ($k \geq 1$), és $kg(b) \neq 0$, akkor b az f'-nek pontosan $k-1$-szeres gyöke. Komplex együtthatós polinomoknál $kg(b)$ biztosan nem nulla.

Ha b pontosan k-szoros gyöke f-nek, akkor $g(b) \neq 0$. A deriváltnak b akkor pontosan k-szoros gyöke, ha $kg(x) + (x-b)g'(x)$-be b-t helyettesítve nem nulla az eredmény. Azaz, ha $kg(b) \neq 0$. $\square$

Példák

$x^6 - x^5 = x^5(x+1) \in \mathbb{Z}_5[x]$-nek $b = 0$ ötszörös gyöke.
A deriváltja $6x^5 - 5x^4 = x^5$, ennek is ötszörös gyöke.
Ennek deriváltja a nullapolinom, nincs is értelme a multiplicitásnak!

A 20. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hatvány és többszörös általános gyűrűben, tulajdonságaik (K2.2.19, 2.2.20).

A 20. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hatvány és többszörös általános gyűrűben, tulajdonságaik (K2.2.19, 2.2.20).
Gyűrű fölötti polinomgyűrű, műveletek, fok (K2.1).

A 20. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hatvány és többszörös általános gyűrűben, tulajdonságaik (K2.2.19, 2.2.20).
Gyűrű fölötti polinomgyűrű, műveletek, fok (K2.1).
Polinomfüggvény (K2.4.1).

A 20. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hatvány és többszörös általános gyűrűben,
tulajdonságaik (K2.2.19, 2.2.20).
Gyűrű fölötti polinomgyűrű, műveletek, fok (K2.1).
Polinomfüggvény (K2.4.1). Polinom formális deriváltja (K3.6.1).

A 20. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hatvány és többszörös általános gyűrűben, tulajdonságaik (K2.2.19, 2.2.20).
Gyűrű fölötti polinomgyűrű, műveletek, fok (K2.1).
Polinomfüggvény (K2.4.1). Polinom formális deriváltja (K3.6.1).

Tételek

A polinomgyűrű egységei (K2.3.2).

A 20. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hatvány és többszörös általános gyűrűben, tulajdonságaik (K2.2.19, 2.2.20).
Gyűrű fölötti polinomgyűrű, műveletek, fok (K2.1).
Polinomfüggvény (K2.4.1). Polinom formális deriváltja (K3.6.1).

Tételek

A polinomgyűrű egységei (K2.3.2). Ha minden elem p-szerese nulla, akkor tagonként lehet p-edik hatványra emelni (3.3.22).

A 20. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hatvány és többszörös általános gyűrűben, tulajdonságaik (K2.2.19, 2.2.20).
Gyűrű fölötti polinomgyűrű, műveletek, fok (K2.1).
Polinomfüggvény (K2.4.1). Polinom formális deriváltja (K3.6.1).

Tételek

A polinomgyűrű egységei (K2.3.2). Ha minden elem p-szerese nulla, akkor tagonként lehet p-edik hatványra emelni (3.3.22).
Gyöktényezők egyszerre kiemelhetősége (K2.4.6, 2.4.7).

A 20. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hatvány és többszörös általános gyűrűben,
tulajdonságaik (K2.2.19, 2.2.20).
Gyűrű fölötti polinomgyűrű, műveletek, fok (K2.1).
Polinomfüggvény (K2.4.1). Polinom formális deriváltja (K3.6.1).

Tételek

A polinomgyűrű egységei (K2.3.2). Ha minden elem p-szerese
nulla, akkor tagonként lehet p-edik hatványra emelni (3.3.22).
Gyöktényezők egyszerre kiemelhetősége (K2.4.6, 2.4.7).
A polinom és a polinomfüggvény véges
és végtelen gyűrű fölött (K2.4.10, 2.4.11).

A 20. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hatvány és többszörös általános gyűrűben, tulajdonságaik (K2.2.19, 2.2.20).
Gyűrű fölötti polinomgyűrű, műveletek, fok (K2.1).
Polinomfüggvény (K2.4.1). Polinom formális deriváltja (K3.6.1).

Tételek

A polinomgyűrű egységei (K2.3.2). Ha minden elem p-szerese nulla, akkor tagonként lehet p-edik hatványra emelni (3.3.22).
Gyöktényezők egyszerre kiemelhetősége (K2.4.6, 2.4.7).
A polinom és a polinomfüggvény véges és végtelen gyűrű fölött (K2.4.10, 2.4.11).
Többszörös gyökök és a derivált (K3.6.3).