# Algebra és számelmélet

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Konzultáció: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

18. előadás

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \dots, v_m \in T^n$.

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \ldots, v_m \in T^n$.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \ldots, v_m \in T^n$.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \ldots, v_m \in T^n$.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \ldots, v_m \in T^n$.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet,

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \ldots, v_m \in T^n$.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \ldots, v_m \in T^n$.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \dots, v_m \in T^n$.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \dots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \dots, v_m$ vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \dots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \dots, v_m \in T^n$.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független,

# Oszlopvektorok függetlensége

Az alábbiakban $T$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ egyikét jelöli.
Valójában $T$ tetszőleges test lehet, ezt a fogalmat később tanuljuk.

## Definíció (F3.3.1–3)

Legyen $v_1 \ldots, v_m \in T^n$.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in V$ vektorok lineárisan összefüggők.

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} +$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} =$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} +$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} =$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.
Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} +$$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} =$$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} =$$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.
Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} +$$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\end{bmatrix} =$$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1 + 4\lambda_2\\3\lambda_1 + 5\lambda_2\end{bmatrix},$$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.
Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\lambda_1 + 4\lambda_2\\3\lambda_1 + 5\lambda_2\end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$ és $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$.

# Példák függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$ és $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$. Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \ldots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független,

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \ldots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \ldots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető:

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \ldots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó,

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \dots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \dots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó, azaz minden oszlopban van vezéregyes.

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \ldots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó, azaz minden oszlopban van vezéregyes.

## Következmény (F3.3.4)

Ha $m > n$, vagyis ha több vektor van, mint a dimenzió,

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \ldots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó, azaz minden oszlopban van vezéregyes.

## Következmény (F3.3.4)

Ha $m > n$, vagyis ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor a rendszer összefüggő.

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \dots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \dots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó, azaz minden oszlopban van vezéregyes.

## Következmény (F3.3.4)

Ha $m > n$, vagyis ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor a rendszer összefüggő. Valóban, mivel minden sorban csak egy vezéregyes lehet,

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \ldots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó, azaz minden oszlopban van vezéregyes.

## Következmény (F3.3.4)

Ha $m > n$, vagyis ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor a rendszer összefüggő. Valóban, mivel minden sorban csak egy vezéregyes lehet, lesz olyan oszlop, ahová nem jut. $\square$

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \ldots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó, azaz minden oszlopban van vezéregyes.

## Következmény (F3.3.4)

Ha $m > n$, vagyis ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor a rendszer összefüggő. Valóban, mivel minden sorban csak egy vezéregyes lehet, lesz olyan oszlop, ahová nem jut. $\square$

## Definíció (F3.3)

$v \in V$ **lineárisan függ** $v_1, \ldots, v_m$-től,

# Függetlenség és egyenletrendszer

A $v_1 \ldots, v_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó, azaz minden oszlopban van vezéregyes.

## Következmény (F3.3.4)

Ha $m > n$, vagyis ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor a rendszer összefüggő. Valóban, mivel minden sorban csak egy vezéregyes lehet, lesz olyan oszlop, ahová nem jut. □

## Definíció (F3.3)

$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként.

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk.

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független,

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő,

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa,

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő.

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött,

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött, ha nem párhuzamosak.

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött, ha nem párhuzamosak.

(7) A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő $\mathbb{R}$ fölött,

# A függetlenség elemi tulajdonságai (F3.3.5)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

(6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött, ha nem párhuzamosak.

(7) A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő $\mathbb{R}$ fölött, ha egy síkban vannak.

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \dots, v_m$-től,

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \dots, v_m$-től, akkor $v_1, \dots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

**Állítás (F3.3.5)**

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

**Állítás (F3.3.5)**

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \dots, v_m$-től, akkor $v_1, \dots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

**Állítás (F3.3.5)**

Ha $v_1, \dots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

**Állítás (F3.3.5)**

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg,

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

**Állítás (F3.3.5)**

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor $v$ nem függ $0$-tól.

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

**Állítás (F3.3.5)**

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor $v$ nem függ $0$-tól.

**Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)**

$v_1, v_2, v_3$ összefüggő,

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \dots, v_m$-től, akkor $v_1, \dots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

## Állítás (F3.3.5)

Ha $v_1, \dots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor $v$ nem függ $0$-tól.

## Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

$v_1, v_2, v_3$ összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$,

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \dots, v_m$-től, akkor $v_1, \dots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

## Állítás (F3.3.5)

Ha $v_1, \dots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor $v$ nem függ $0$-tól.

## Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

$v_1, v_2, v_3$ összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik $\lambda_j$ nulla.

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

**Állítás (F3.3.5)**

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0$, $v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor $v$ nem függ $0$-tól.

**Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)**

$v_1, v_2, v_3$ összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik $\lambda_j$ nulla.
Ha például $\lambda_2 \neq 0$,

# Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha $v$ függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a $-1$ együttható miatt.

**Állítás (F3.3.5)**

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor $v$ nem függ $0$-tól.

**Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)**

$v_1, v_2, v_3$ összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik $\lambda_j$ nulla.
Ha például $\lambda_2 \neq 0$, akkor $v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1 - (\lambda_3/\lambda_2)v_3$. $\square$

# A rang definíciója

## Definíció (F3.4)

Egy vektorrendszer rangja $r$,

# A rang definíciója

### Definíció (F3.4)

Egy vektorrendszer rangja $r$, ha $r$ darab független vektor kiválasztható belőle,

# A rang definíciója

## Definíció (F3.4)

Egy vektorrendszer rangja $r$, ha $r$ darab független vektor kiválasztható belőle, de több nem.

# A rang definíciója

**Definíció (F3.4)**

Egy vektorrendszer rangja $r$, ha $r$ darab független vektor kiválasztható belőle, de több nem.
Egy mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló rendszer rangja.

# A rang definíciója

## Definíció (F3.4)

Egy vektorrendszer rangja $r$, ha $r$ darab független vektor kiválasztható belőle, de több nem.
Egy mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló rendszer rangja.
Egy mátrix sorrangja a soraiból álló rendszer rangja.

# A rang definíciója

## Definíció (F3.4)

Egy vektorrendszer rangja $r$, ha $r$ darab független vektor kiválasztható belőle, de több nem.
Egy mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló rendszer rangja.
Egy mátrix sorrangja a soraiból álló rendszer rangja.

## Tétel (F3.4.2)

A Gauss-elimináció lépései során az oszloprang nem változik.
Az oszloprang az elimináció során keletkező vezéregyesek száma.

# A rang definíciója

## Definíció (F3.4)

Egy vektorrendszer rangja $r$, ha $r$ darab független vektor kiválasztható belőle, de több nem.
Egy mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló rendszer rangja.
Egy mátrix sorrangja a soraiból álló rendszer rangja.

## Tétel (F3.4.2)

A Gauss-elimináció lépései során az oszloprang nem változik.
Az oszloprang az elimináció során keletkező vezéregyesek száma.

Vegyük ki az oszlopok egy részhalmazát, és tekintsük a hozzájuk tartozó homogén lineáris egyenletrendszert.

# A rang definíciója

## Definíció (F3.4)

Egy vektorrendszer rangja $r$, ha $r$ darab független vektor kiválasztható belőle, de több nem.
Egy mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló rendszer rangja.
Egy mátrix sorrangja a soraiból álló rendszer rangja.

## Tétel (F3.4.2)

A Gauss-elimináció lépései során az oszloprang nem változik.
Az oszloprang az elimináció során keletkező vezéregyesek száma.

Vegyük ki az oszlopok egy részhalmazát, és tekintsük a hozzájuk tartozó homogén lineáris egyenletrendszert. Az eredeti mátrixon a sorokkal végzett eliminációs lépések nem változtatják meg e lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát.

# A rang definíciója

**Definíció (F3.4)**

Egy vektorrendszer rangja $r$, ha $r$ darab független vektor kiválasztható belőle, de több nem.
Egy mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló rendszer rangja.
Egy mátrix sorrangja a soraiból álló rendszer rangja.

**Tétel (F3.4.2)**

A Gauss-elimináció lépései során az oszloprang nem változik.
Az oszloprang az elimináció során keletkező vezéregyesek száma.

Vegyük ki az oszlopok egy részhalmazát, és tekintsük a hozzájuk tartozó homogén lineáris egyenletrendszert. Az eredeti mátrixon a sorokkal végzett eliminációs lépések nem változtatják meg e lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát. Ezért nem változik az sem, hogy ezen oszlopok függetlenek-e

# A rang definíciója

## Definíció (F3.4)

Egy vektorrendszer rangja $r$, ha $r$ darab független vektor kiválasztható belőle, de több nem.
Egy mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló rendszer rangja.
Egy mátrix sorrangja a soraiból álló rendszer rangja.

## Tétel (F3.4.2)

A Gauss-elimináció lépései során az oszloprang nem változik.
Az oszloprang az elimináció során keletkező vezéregyesek száma.

Vegyük ki az oszlopok egy részhalmazát, és tekintsük a hozzájuk tartozó homogén lineáris egyenletrendszert. Az eredeti mátrixon a sorokkal végzett eliminációs lépések nem változtatják meg e lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát. Ezért nem változik az sem, hogy ezen oszlopok függetlenek-e (hiszen az attól függ, hogy van-e nemtriviális megoldás, vagy nincs).

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg,

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek.

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Ha azonban oszlopok egy halmaza tartalmaz olyat, ahol nincs vezéregyes,

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Ha azonban oszlopok egy halmaza tartalmaz olyat, ahol nincs vezéregyes, akkor a hozzá tartozó egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása,

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Ha azonban oszlopok egy halmaza tartalmaz olyat, ahol nincs vezéregyes, akkor a hozzá tartozó egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, hiszen a megfelelő szabad változó helyébe írhatunk nem nulla számot.

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Ha azonban oszlopok egy halmaza tartalmaz olyat, ahol nincs vezéregyes, akkor a hozzá tartozó egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, hiszen a megfelelő szabad változó helyébe írhatunk nem nulla számot. Ezért az elimináció végén az oszloprang tényleg ugyanaz, mint a vezéregyesek száma. $\square$

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Ha azonban oszlopok egy halmaza tartalmaz olyat, ahol nincs vezéregyes, akkor a hozzá tartozó egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, hiszen a megfelelő szabad változó helyébe írhatunk nem nulla számot. Ezért az elimináció végén az oszloprang tényleg ugyanaz, mint a vezéregyesek száma. $\square$
Az előző tétel gyors algoritmust ad az oszloprang meghatározására.

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Ha azonban oszlopok egy halmaza tartalmaz olyat, ahol nincs vezéregyes, akkor a hozzá tartozó egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, hiszen a megfelelő szabad változó helyébe írhatunk nem nulla számot. Ezért az elimináció végén az oszloprang tényleg ugyanaz, mint a vezéregyesek száma. □
Az előző tétel gyors algoritmust ad az oszloprang meghatározására.

**Tétel (F3.4.2)**

Egy $M$ mátrix sorrangja ugyanaz, mint az oszloprangja.

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Ha azonban oszlopok egy halmaza tartalmaz olyat, ahol nincs vezéregyes, akkor a hozzá tartozó egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, hiszen a megfelelő szabad változó helyébe írhatunk nem nulla számot. Ezért az elimináció végén az oszloprang tényleg ugyanaz, mint a vezéregyesek száma. $\square$
Az előző tétel gyors algoritmust ad az oszloprang meghatározására.

**Tétel (F3.4.2)**

Egy $M$ mátrix sorrangja ugyanaz, mint az oszloprangja.
(Ezt $M$ rangjának nevezzük, és $r(M)$-mel jelöljük.)

# A bizonyítás folytatása

Tehát az elimináció lépéseikor az oszlopok ugyanazon részhalmazai lesznek függetlenek, mint eredetileg, vagyis az oszloprang tényleg nem változik.
Az elimináció végén a vezéregyeseket tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Ha azonban oszlopok egy halmaza tartalmaz olyat, ahol nincs vezéregyes, akkor a hozzá tartozó egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, hiszen a megfelelő szabad változó helyébe írhatunk nem nulla számot. Ezért az elimináció végén az oszloprang tényleg ugyanaz, mint a vezéregyesek száma. □
Az előző tétel gyors algoritmust ad az oszloprang meghatározására.

**Tétel (F3.4.2)**

Egy $M$ mátrix sorrangja ugyanaz, mint az oszloprangja.
(Ezt $M$ rangjának nevezzük, és $r(M)$-mel jelöljük.)
Egy mátrixnak és a transzponáltjának a rangja megegyezik.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \dots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai,

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \dots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \dots, w_m$ az oszlopai.
Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük $L$-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük $L$-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük $L$-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük $L$-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje $s$ a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort,

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük $L$-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje $s$ a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, $t$ a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük $L$-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje $s$ a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, $t$ a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort. A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük $L$-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje $s$ a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, $t$ a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort.
A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$.
A $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$ feltétel azt jelenti, hogy $Lt = w$.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

**Lemma**

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük $L$-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje $s$ a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, $t$ a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort.
A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$.
A $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$ feltétel azt jelenti, hogy $Lt = w$.
A szorzás asszociativitása miatt $sw = s(Lt) = (sL)t = 0t = 0$.

# Sorrang és oszloprang: Lemma

## Lemma

Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ egy $L$ mátrix sorai, $w_1, \ldots, w_m$ az oszlopai. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Bővítsük $L$-et olyan oszlopokkal, amelyek lineárisan függenek $w_1, \ldots, w_m$-től. Ekkor a kibővített mátrix sorainak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja szintén nulla.

A kibővített mátrix egyik oszlopa legyen $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$. Jelölje $s$ a $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ sorvektort, $t$ a $[\mu_1 \ldots, \mu_m]^T$ oszlopvektort.
A $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ feltétel azt jelenti, hogy $sL = 0$.
A $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m$ feltétel azt jelenti, hogy $Lt = w$.
A szorzás asszociativitása miatt $sw = s(Lt) = (sL)t = 0t = 0$.
Vagyis $w$ komponenseinek a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja tényleg nulla. $\square$

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek,

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

## Bizonyítás

Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot $N$-ből.
Ezek $w_1, \ldots, w_m$,

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

## Bizonyítás

Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot $N$-ből.
Ezek $w_1, \ldots, w_m$, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

## Bizonyítás

Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot $N$-ből.
Ezek $w_1, \ldots, w_m$, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.
Ekkor $N$ oszloprangja $m$.

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

## Bizonyítás

Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot $N$-ből.
Ezek $w_1, \ldots, w_m$, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.
Ekkor $N$ oszloprangja $m$.
Mivel $w_1, \ldots, w_m$, független, de bármely oszlopot hozzájuk véve már összefüggő rendszert kapunk

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

## Bizonyítás

Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot $N$-ből.
Ezek $w_1, \dots, w_m$, és $L = [w_1, \dots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.
Ekkor $N$ oszloprangja $m$.
Mivel $w_1, \dots, w_m$, független, de bármely oszlopot hozzájuk véve már összefüggő rendszert kapunk (hiszen nincs $m$-nél több független oszlop)

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

## Bizonyítás

Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot $N$-ből.
Ezek $w_1, \ldots, w_m$, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.
Ekkor $N$ oszloprangja $m$.
Mivel $w_1, \ldots, w_m$, független, de bármely oszlopot hozzájuk véve már összefüggő rendszert kapunk (hiszen nincs $m$-nél több független oszlop) ezért $N$ minden oszlopa függ $w_1, \ldots, w_m$-től.

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

## Bizonyítás

Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot $N$-ből.
Ezek $w_1, \ldots, w_m$, és $L = [w_1, \ldots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.
Ekkor $N$ oszloprangja $m$.
Mivel $w_1, \ldots, w_m$, független, de bármely oszlopot hozzájuk véve már összefüggő rendszert kapunk (hiszen nincs $m$-nél több független oszlop) ezért $N$ minden oszlopa függ $w_1, \ldots, w_m$-től.
Indirekt feltevés: $m < k$.

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

## Bizonyítás

Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot $N$-ből.
Ezek $w_1, \dots, w_m$, és $L = [w_1, \dots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.
Ekkor $N$ oszloprangja $m$.
Mivel $w_1, \dots, w_m$, független, de bármely oszlopot hozzájuk véve már összefüggő rendszert kapunk (hiszen nincs $m$-nél több független oszlop) ezért $N$ minden oszlopa függ $w_1, \dots, w_m$-től.
Indirekt feltevés: $m < k$. Ekkor $L$ sorai összefüggenek, mert $T^m$-ben bármely $k > m$ darab vektor összefügg.

# Sorrang és oszloprang: következmény

## Következmény

Ha egy $N$ mátrixnak $k$ sora van, és ezek lineárisan függetlenek, akkor oszloprangja legalább $k$.

## Bizonyítás

Vegyünk ki a lehető legtöbb független oszlopot $N$-ből.
Ezek $w_1, \dots, w_m$, és $L = [w_1, \dots, w_m]$ a megfelelő részmátrix.
Ekkor $N$ oszloprangja $m$.
Mivel $w_1, \dots, w_m$, független, de bármely oszlopot hozzájuk véve már összefüggő rendszert kapunk (hiszen nincs $m$-nél több független oszlop) ezért $N$ minden oszlopa függ $w_1, \dots, w_m$-től.
Indirekt feltevés: $m < k$. Ekkor $L$ sorai összefüggenek, mert $T^m$-ben bármely $k > m$ darab vektor összefügg. De akkor $N$ sorai is összefüggenének a Lemma miatt, ellentmondás. $\square$

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$.

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$.

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt
$N$ oszlopprangja legalább $k$,

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt $N$ oszloprangja legalább $k$, így $M$ oszloprangja is legalább $k$ (HF).

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt $N$ oszlopranga legalább $k$, így $M$ oszlopranga is legalább $k$ (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang.

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt $N$ oszlopprangja legalább $k$, így $M$ oszlopprangja is legalább $k$ (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az $M$ transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt $N$ oszloprangja legalább $k$, így $M$ oszloprangja is legalább $k$ (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az $M$ transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

Az $M$ mátrix determinánsrangja $r$, ha kiválasztható $r$ sor és $r$ oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla,

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt $N$ oszlopprangja legalább $k$, így $M$ oszlopprangja is legalább $k$ (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az $M$ transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

Az $M$ mátrix **determinánsrangja** $r$, ha kiválasztható $r$ sor és $r$ oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla, de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt $N$ oszlopranga legalább $k$, így $M$ oszlopranga is legalább $k$ (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az $M$ transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

Az $M$ mátrix determinánsrangja $r$, ha kiválasztható $r$ sor és $r$ oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla, de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

## Tétel (F3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsrangja egyenlő a rangjával.

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

**Sorrang = oszloprang**

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt $N$ oszloprangja legalább $k$, így $M$ oszloprangja is legalább $k$ (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az $M$ transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

Az $M$ mátrix determinánsrangja $r$, ha kiválasztható $r$ sor és $r$ oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla, de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

**Tétel (F3.4.2. Tétel)**

Minden mátrix determinánsrangja egyenlő a rangjával.

Biz.: Gauss-elimináció.

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

**Sorrang = oszloprang**

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt
$N$ oszloprangja legalább $k$, így $M$ oszloprangja is legalább $k$ (HF).
Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az $M$ transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

Az $M$ mátrix determinánsrangja $r$, ha kiválasztható $r$ sor és $r$ oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla, de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

**Tétel (F3.4.2. Tétel)**

Minden mátrix determinánsrangja egyenlő a rangjával.

Biz.: Gauss-elimináció. Négyzetes mátrixokra $\det(N) = \det(N^T)$,

# A rangok egyenlőségének bizonyítása

## Sorrang = oszloprang

Legyen $M$ sorrangja $k$. Vegyünk ki $k$ független sort, a kapott részmátrix legyen $N$. Az előző Következmény miatt $N$ oszloprangja legalább $k$, így $M$ oszloprangja is legalább $k$ (HF). Beláttuk, hogy oszloprang $\geq$ sorrang. Ezt az $M$ transzponáltjára alkalmazva a fordított egyenlőtlenség adódik. $\square$

Az $M$ mátrix **determinánsrangja** $r$, ha kiválasztható $r$ sor és $r$ oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla, de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

## Tétel (F3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsrangja egyenlő a rangjával.

Biz.: Gauss-elimináció. Négyzetes mátrixokra $\det(N) = \det(N^T)$, így új bizonyítást kapunk a sorrang és oszloprang egyenlőségére.

# A kibővített mátrix

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2\\
&\ldots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}
$$

# A kibővített mátrix

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},
$$

# A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}$$

# A kibővített mátrix

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.
$$

# A kibővített mátrix

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.
$$

Az $M$ a fenti $Mx = b$ egyenletrendszer mátrixa.

# A kibővített mátrix

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.
$$

Az $M$ a fenti $Mx = b$ egyenletrendszer mátrixa.

$$
[M, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}
$$
a **kibővített** mátrix.

# A megoldhatóság jellemzése

## Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg,

# A megoldhatóság jellemzése

## Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával:

# A megoldhatóság jellemzése

## Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$.

# A megoldhatóság jellemzése

## Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n\times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű,

# A megoldhatóság jellemzése

**Tétel (F3.4.3. Tétel)**

Legyen $M \in T^{n\times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$

# A megoldhatóság jellemzése

## Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis $M$ rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

# A megoldhatóság jellemzése

## Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis $M$ rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

## Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha nincs tilos sor.

# A megoldhatóság jellemzése

## Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis $M$ rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

## Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha nincs tilos sor.

A tilos sor azt jelenti, hogy $[M, b]$-ben még egyet karikázhatunk,

# A megoldhatóság jellemzése

## Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis $M$ rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

## Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha nincs tilos sor.
A tilos sor azt jelenti, hogy $[M, b]$-ben még egyet karikázhatunk, vagyis $r(M) < r([M, b])$.

# A megoldhatóság jellemzése

## Tétel (F3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis $M$ rangja egyenlő az ismeretlenek számával).

## Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha nincs tilos sor.
A tilos sor azt jelenti, hogy $[M, b]$-ben még egyet karikázhatunk, vagyis $r(M) < r([M, b])$.
Akkor és csak akkor egyértelmű a megoldás, ha $M$ oszlopai lineárisan függetlenek is. □

# A determináns eltűnése

**Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)**

Egy determináns akkor és csak akkor nulla,

# A determináns eltűnése

**Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)**

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek.

# A determináns eltűnése

**Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)**

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \dots, v_n$.

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$. Vonjuk ki az első sorból sorban az $i$-edik sor $\lambda_i$ szeresét.

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az $i$-edik sor $\lambda_i$ szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az $i$-edik sor $\lambda_i$ szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az $i$-edik sor $\lambda_i$ szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az $i$-edik sor $\lambda_i$ szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \dots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az $i$-edik sor $\lambda_i$ szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az $i$-edik sor $\lambda_i$ szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az $i$-edik sor $\lambda_i$ szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni).

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha a sorai lineárisan összefüggenek. Ugyanez az oszlopokra is igaz (transzponált).

## Bizonyításvázlat

Legyenek a sorok $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ha összefüggenek, akkor valamelyik függ a többitől, pl. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.
Vonjuk ki az első sorból sorban az $i$-edik sor $\lambda_i$ szeresét.
Ekkor az első sor nulla lesz, ezért a kapott determináns nulla.
Ez az eredeti determinánssal egyenlő, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni).
Tehát ebből a sorból ki tudtuk vonni a többi sor alkalmas skalárszorosát úgy, hogy csupa nulla sort kapjunk. $\square$

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége,

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége, lineáris függés (F3.3.1–3).

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége,
lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja,

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége,
lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-,

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége,
lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop-

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége, lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja (F3.3).

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége, lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja (F3.3). Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége, lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja (F3.3). Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

## Tételek

Dimenziónyinál több vektor összefügg (F3.3.4).

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége, lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja (F3.3). Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

## Tételek

Dimenziónyinál több vektor összefügg (F3.3.4).
A függés és a függetlenség tulajdonságai (F3.3.5).

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége,
lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és
determinánsrangja (F3.3). Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

## Tételek

Dimenziónyinál több vektor összefügg (F3.3.4).
A függés és a függetlenség tulajdonságai (F3.3.5).
A rang meghatározása Gauss-eliminációval (F3.4.2).

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége, lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja (F3.3). Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

## Tételek

Dimenziónyinál több vektor összefügg (F3.3.4).
A függés és a függetlenség tulajdonságai (F3.3.5).
A rang meghatározása Gauss-eliminációval (F3.4.2).
A sorrang és az oszloprang egyenlősége (F3.4.2).

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége, lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja (F3.3). Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

## Tételek

Dimenziónyinál több vektor összefügg (F3.3.4).
A függés és a függetlenség tulajdonságai (F3.3.5).
A rang meghatározása Gauss-eliminációval (F3.4.2).
A sorrang és az oszloprang egyenlősége (F3.4.2).
Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának,

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége, lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja (F3.3). Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

## Tételek

Dimenziónyinál több vektor összefügg (F3.3.4).
A függés és a függetlenség tulajdonságai (F3.3.5).
A rang meghatározása Gauss-eliminációval (F3.4.2).
A sorrang és az oszloprang egyenlősége (F3.4.2).
Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának, és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével (F3.4.3).

# A 18. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Oszlopvektorok lineáris függetlensége, összefüggősége, lineáris függés (F3.3.1–3).
Vektorrendszer rangja, mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja (F3.3). Egyenletrendszer kibővített mátrixa.

## Tételek

Dimenziónyinál több vektor összefügg (F3.3.4).
A függés és a függetlenség tulajdonságai (F3.3.5).
A rang meghatározása Gauss-eliminációval (F3.4.2).
A sorrang és az oszloprang egyenlősége (F3.4.2).
Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának, és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével (F3.4.3).
A determináns eltűnésének jellemzése (F3.2.3, 3.5.2).