Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

A 9. és 10. előadás-diához tartozó feladatsor

1. Határozzuk meg az Euklideszi algoritmussal 112 és 301 legnagyobb közös osztóját. Írjuk föl a legnagyobb közös osztót $112x + 301y$ alakban, ahol x és y egész.

2. Az $(a, b) = au + bv$ előállításban mi u és v legnagyobb közös osztója?

3. Keressük meg az összes olyan a, b természetes számokból álló párt, amelyre $ab = 1452$ és $(a, b) = 11$.

4. Mely pozitív egész n-ekre igaz, hogy $n - 1 \mid n^2 + 1$?

5. Melyik igaz az alábbi állítások közül:

(1) Ha $a \mid 8b + 5c$ és $a \mid 5b + 3c$ akkor $a \mid b$ és $a \mid c$.
(2) Ha $a \mid 2b + c$ és $a \mid b + 2c$ akkor $a \mid b$ és $a \mid c$.

6. Határozzuk meg $(n - 1, n^2 + 1)$ és $(n! + 1, (n + 1)! + 1)$ értékét.

7. Tudjuk, hogy a $\frac{8n+3}{7n+1}$ tört egyszerűsíthető. Melyik számmal?

8. Lássuk be, hogy $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ nem egyszerűsíthető.

9. Igazoljuk, hogy $\sqrt[5]{24}$ és $\log_{12} 78$ irracionálisak.

10. Adjuk meg egy-egy valódi osztóját a következő két számnak: $7^{21} + 4^{21}$, $2^{1111} - 1$.

11. Melyek oldhatók meg az alábbi egyenletek közül?

(1) $x^2 - 4y = 10$
(2) $x^2 + y^2 = 99999999$
(3) $x^2 + y^2 = 100000001$

12. ***(*)*** Oldjuk meg a természetes számok körében az $x^3 - y^3 = 3^n$ egyenletet.

13. ***(*)*** Bizonyítsuk be, hogy n egész szám közül mindig kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük osztható n-nel. Igaz-e ez az állítás $n - 1$ darab számra?

14. ***(*)*** Maximum hány szám választható ki az $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ halmazból úgy, hogy egyik sem osztója a másiknak?

15. ***(**)*** Mutassuk meg, hogy $n > 0$, $k > 0$, $a > 1$ egészek esetén $(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1$.

16. ***(**)*** Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$ tizedestört alakjában a tizedesvesszőt követő első n jegy egyenlő.

17. ***(**)*** Mely számok állnak elő két négyzetszám összegeként? Segédállítások:

a) : Igazoljuk, hogy ha n páros és előáll két négyzetszám összegeként, akkor $\frac{n}{2}$ is előáll két négyzetszám összegeként.

b) : Legyen $p = a^2 + b^2$ prím, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Tegyük föl, hogy $p \mid n$ és n előáll két négyzetszám összegeként. Igazoljuk, hogy $\frac{n}{p}$ is előáll két négyzetszám összegeként.

18. ***(**)*** Mely p prímekre lesz $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ négyzetszám?

19. ***(**)*** Igazoljuk, hogy minden k pozitív egészhez van olyan n, amelyre $\varphi(n) = \varphi(n + k)$.

20. ***(***)*** Legyen f_n a Fibonacci sorozat n-edik tagja ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$, és $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ha $n \geq 1$). Igazoljuk, hogy $f_{(n,k)} = (f_n, f_k)$. Vezessük le ebből, hogy $f_k \mid f_n$ akkor és csak akkor, ha $k \mid n$ vagy $k = 2$.