Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

A 8. előadás-diához tartozó feladatsor feladatainak megoldásai

4, 20. Milyen maradékot adhat egy négyzetszám 3-mal, 5-tel, illetve 8-cal osztva? □

A modulo n maradékokkal való számolás azt jelenti, hogy összeg és szorzat n-nel való osztási maradékát kiszámíthatjuk úgy is, hogy az eredeti számok maradékait adjuk vagy szorozzuk össze, és ennek vesszük az n-nel való osztási maradékát. Lásd *Kiss: Bevezetés az algebrába*, 1.1. szakasz. Például a 23 szám négyzetének 5-tel való osztási maradékát úgy számolhatjuk ki, hogy a 23-at elosztjuk maradékosan 5-el, a kapott maradékot négyzetre emeljük, az eredmény $3 \cdot 3 = 9$, majd a 9-nek vesszük az 5-tel való osztási maradékát, ami 4.

Ennek alapján ha a kérdés a négyzetszámok 3-mal való osztási maradéka, akkor elég a lehetséges 3-mal való osztási maradékokat négyzetre emelni. Ezek $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ és $2^2 = 4$. Ez utóbbinak is 1 a 3-mal való osztási maradéka. A lehetséges maradékok tehát 0 és 1. Hasonlóan a négyzetszámok lehetséges osztási maradékai $0, 1, 4$ modulo 5 és modulo 8 is. Érdemes külön kiemelni hogy *páratlan szám négyzete 8-cal osztva mindig 1 maradékot ad.*

5. Határozzuk meg 7^{1867} utolsó számjegyét. □

A szám utolsó számjegye a 10-zel való osztási maradék. Ezért az előző megoldásban írottak alapján ha 7 hatványainak utolsó számjegyeit keressük, akkor minden 7-tel való szorzás után csak az utolsó számjeggyel kell tovább számolni. Így $7^2 = 49$ maradéka 9, ezért 7^3 maradéka $9 \cdot 7 = 63$ maradéka, azaz 3, és így tovább, $7^4 \to 1$, $7^5 \to 7$, $7^6 \to 9$, $7^7 \to 3$, $7^8 \to 1$. A képzési szabályból következik, hogy a maradékok négyesével periodikusan ismétlődnek: $1, 7, 9, 3$. A 4-gyel osztható kitevők 1 maradékot adnak, a $4k+1$ alakúak 7 maradékot, és így tovább. Mivel az 1867 kitevő 4-gyel osztva 3 maradékot ad, ezért 7^{1867} utolsó számjegye 3.

3. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$ egészre $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$. □

Első megoldás: n szerinti teljes indukcióval. Ha $n = 1$, akkor a kifejezés értéke 8. Azonos átalakítással $5^{n+1} + 2 \cdot 3^{(n+1-1)} + 1 = 5(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) - 4(3^{n-1} + 1)$. Az első tag az indukciós feltevés miatt osztható 8-cal, a második pedig azért, mert $3^{n-1} + 1$ páros szám.
Második megoldás: Az előzőek alapján 5^n és $(-3)^n$ ugyanazt a maradékot adják 8-cal osztva. Azonos átalakítással $(-3)^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 = 1 + 3^{n-1}(2 - 3 \cdot (-1)^{n-1})$. A 3 szám maradékai kettesével periodikusak modulo 8, páros kitevő esetében 1, páratlan kitevőre 3 a maradék. Ezért az eredmény $1 + 3 \cdot (2 + 3) = 16$, illetve $1 + 1 \cdot (2 - 3) = 0$, mindkettő 8-cal osztható.

6. Miért nem lehet 100 páratlan szám reciprokösszege 1? Nehezebb: adjunk meg 100 különböző pozitív egész számot, amelyek reciprokösszege 1. □

Hozzuk a törteket közös nevezőre. A nevező páratlan lesz, mert páratlan számok legkisebb közös többszöröse is páratlan. A számlálóban 100 darab páratlan szám összege áll, ami páros. Ezért a számláló és a nevező nem lehetnek egyenlők.

A nehezebb kérdés megválaszolásához induljunk ki az $(1/2)+(1/3)+(1/6) = 1$ összefüggésből. Osszuk el ezt 2-vel, és az eredményhez adjunk 1/2-et: $1 = (1/2)+(1/4)+(1/6)+(1/12)$. Csupa különböző nevezőket kaptunk, mert az újonnan beírt törtek mind kisebbek 1/2-nél. Az eljárást folytathatjuk, az előző egyenletet mindig 2-vel osztva. Így az 1-nek megkapjuk olyan előállításait, ahol a törtek száma akármilyen 2-nél nagyobb szám lehet.

7. Lehet-e $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$ két egymást követő egész szám szorzata? □

Nem, mert két egymás utáni szám szorzata páros, $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$ pedig páratlan.

8. Határozzuk meg a felírt szám hiányzó számjegyeit úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság: $36 \mid \overline{52x2y}$, illetve $99 \mid \overline{62xy427}$. □

Mivel 4 **és** 9 **relatív prímek,** egy szám pontosan akkor osztható 36-tal, ha osztható 4-gyel és 9-cel is. Az oszthatósági szabályok alapján ez akkor teljesül, ha egyrészt $4 \mid \overline{2y} = 20 + y$, másrészt $9 \mid 5 + 2 + x + 2 + y = x + y + 9$. Ezért $y \in \{0, 4, 8\}$. Az $y = 0$ esetben $x = 0$, vagy 9, ezért az 52020 és 52920 megoldásokat kapjuk. Az y másik két értékéből az 52524 és 52128 megoldások adódnak. A feladat második kérdése esetében a 11-gyel való oszthatósági szabály szerint $11 \mid 6 - 2 + x - y + 4 - 2 + 7$, továbbá $9 \mid 6 + 2 + x + y + 4 + 2 + 7$. Mivel x és y egyjegyű, $x - y \in \{9, -2\}$ és $x + y \in \{6, 15\}$. Az egyetlen megoldás 6224427.

9. Bizonyítsuk be, hogy $13 \mid \overline{abcabc}$ mindig teljesül. □

$\overline{abcabc} = 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c = 1001 \cdot \overline{abc}$, és $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

10. Tegyük fel, hogy az (a, b, c számjegyekből álló) $\overline{abc}$ háromjegyű szám osztható 37-tel. Mutassuk meg, hogy ekkor a $\overline{bca}$ szám is osztható 37-tel. □

$\overline{abc0} - \overline{bca} = 999a = 37 \cdot 3^3 a$.

11. Egy 3×3-as táblázatba különböző számjegyeket írtunk úgy, hogy a sorokból (balról jobbra) és az oszlopokból (felülről lefelé) kiolvasható hat darab, tízes számrendszerbeli háromjegyű szám mind osztható 6-tal. Mutassuk meg, hogy a hat szám közül pontosan egy osztható 5-tel. Adjunk is meg egy megfelelő kitöltést. □

Mind a hat háromjegyű szám páros számjegyre végződik. Ezért mind az öt páros számjegynek szerepelnie kell a táblázat öt megfelelő helyén, vagyis a jobb oldali oszlopban és az alsó sorban, és így itt páratlan számjegy, pl. az 5 nem szerepelhet. Tehát 5-re végződő szám nincs, 0-ra végződő meg csak úgy lehetne egynél több, ha a 0 a jobb alsó sarokban lenne. De ez lehetetlen, mert a páros számjegyek között csak a 0 és a 6 osztható hárommal, és ezért a 6 és 0 nem szerepelhet egy számban. A számjegyek összege osztható 3-mal, és $0+1+2+\ldots+9$ is, így a 10 számjegyből egy páratlan, hárommal osztható kell, hogy kimaradjon, tehát a 3 vagy a 9. Például megfelelő, ha a sorokba a 372, 150, 864 számokat írjuk.

12. Egy egész oldalú téglalap területének és kerületének a mérőszáma megegyezik. Mekkorák lehetnek a téglalap oldalai? □

A megoldás kulcsa a *szorzattá alakítás*. Ha az oldalak a és b, akkor $2a+2b = ab$, mindkét oldalhoz 4-et adva $4 = (a-2)(b-2)$. Ezért $a-2 \mid 4$. De $a-2 > -2$, ezért $a - 2 \in \{-1, 1, 2, 4\}$. A megfelelő b értékek rendre $-2, 6, 4, 3$. A feltételeknek tehát egybevágóság erejéig a 4 oldalhosszúságú négyzet, vagy a 3 és 6 oldalhosszúságú téglalap felel meg.

13. Egy sokszög átlóinak száma prímszám. Hány oldalú a sokszög? □

Legyen n a sokszög csúcsainak a száma, nyilván $n > 3$, mert a háromszögnek nincs átlója, a 0 pedig nem prímszám. Az átlók száma $n(n-3)/2$ (mert minden csúcsból $n-3$ átló indul, és minden átlót kétszer számoltunk). Ha n páros, akkor $(n/2)(n-3)$ két pozitív egész szorzata, ami prímszám, és így valamelyik tényező 1. Mivel $n/2 > 1$, ezért $n - 3 = 1$, és egy négyszög átlóinak a száma 2, ami tényleg prím. Ha n páratlan, akkor n és $(n-3)/2$ egyike lesz 1, ahonnan $n = 5$ adódik. Ez is megoldás, mert az ötszög átlóinak száma, 5 is prímszám.

21. Igazoljuk, hogy $6 \mid n(n^2+5)$ minden n egész számra. ☐

Az egyik tényező páros, a másik páratlan, ezért a szorzatuk páros. Ha n nem osztható 3-mal, akkor n^2+5 maradéka 0 lesz modulo 3, ezért a szorzat 3-mal osztható. Mivel $(2,3)=1$, ezért osztható 6-tal is. Alternatív megoldásként a modulo 6 maradékokat végigpróbálgathatjuk.

22. Bizonyítsuk be, hogy ha $5a+9b$ osztható 23-mal, akkor $3a+10b$ is osztható 23-mal. ☐

Ejtsük ki b-t: $10(5a+9b)-9(3a+10b)=23a$. Ezért $23 \mid 9(3a+10b)$. Mivel $(23,9)=1$, ezért $23 \mid 3a+10b$. Szabály: **ha $a \mid bc$ és $(a,b)=1$, akkor $a \mid c$.**

23. Igazoljuk, hogy ha $27|\overline{abc}$, akkor $27|\overline{bca}$. ☐

$27 \mid \overline{abc}-\overline{bca} = 9(11a-10b-c) = 9\big(12a-9b-(a+b+c)\big)$, mert $3 \mid a+b+c$.

24. Mely p pozitív egész számokra lehet p, $p+2$ és $p+4$ egyszerre prím? ☐

A számok egyike osztható hárommal, és mivel prím, csak 3 lehet. De $p+2 \geq 4$, így $p=3$. Ez tényleg megoldás, mert 3, 5, 7 prímszámok.

25. Halhatatlan kapitánynak három halhatatlan unokája van, akiknek az életkora három különböző prím, és ezek négyzetösszege is prím. Hány éves a kapitány legkisebb unokája? ☐

Legyenek $2 \leq p < q < r$ az unokák életkorai. Ha e számok egyike sem osztható hárommal, akkor $3 \mid p^2+q^2+r^2 > 3$, így nem lehet prím. Ezért p,q,r egyike 3. De $p \neq 2$, mert akkor $p^2+q^2+r^2 > 2$ páros lenne. Ezért a legkisebb unoka csak 3 éves lehet. Ez meg is valósulhat, mert pl. $3^2+5^2+7^2=93$ prímszám.

26. Oldjuk meg a prímszámok körében a $p^2-2q^2=1$ egyenletet. ☐

Nyilván p páratlan, de akkor $4 \mid p^2-1=2q^2$, és ezért $2 \mid q$, azaz $q=2$ és $p=3$.

27. Adjunk meg végtelen sok olyan n-et, amelyre $29 \mid 2^n+5^n$. ☐

Ha m páratlan, akkor $a+b \mid a^m+b^m$. Ezért ha $n=4k+2$, akkor $2^2+5^2 \mid 2^n+5^n$.

14*. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, melyekre n^4+4 prímszám. ☐

Mivel $n^4+4=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$, és ez két pozitív tényező, ezért a kisebbik 1, és így $n=1$, ami jó, mert az 5 prím. E szorzattá alakítást komplex számokkal is vizsgálni fogjuk.

15. Adjuk meg az összes olyan $n \geq 0$ egész számot, amelyre n^2+n+1 négyzetszám. ☐

Mivel $n^2 < n^2+n+1 \leq (n+1)^2$, és ez két szomszédos négyzetszám, ezért $n=0$.

16. Adjuk meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $1+2^{11}+2^n$ négyzetszám. ☐

Legyen ez a szám m^2. A 3-mal való osztási maradékokat vizsgálva látjuk, hogy $n=2k$ páros. Ezért $3 \cdot 683 = 1+2^{11} = m^2-2^n = (m-2^k)(m+2^k)$, és itt 683 prím. Ezért $m-2^k$ értéke 1, vagy 3, és $m+2^k=2049$, illetve 683. Ezért $2^k=1024$ vagy 340, utóbbi nem 2-hatvány. A $k=10$, azaz $n=20$ megfelelő, mert $1+2^{11}+2^{20}=(1+2^{10})^2$.

17. Igazoljuk, hogy $2^n \mid (n+1)(n+2)\ldots(2n)$. ☐

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{2^n} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

28. Igazoljuk, hogy ha $3 \nmid k$, akkor $7 \mid 1^k + 4^k + 9^k$. □

A 9 helyett $9 - 7 = 2$-t írhatunk. A 2 hatványai hármasával periodikusak modulo 7, a periódus $1, 2, 4$. Ezért ha $k = 3m+1$, akkor $1^k + 4^k + 2^k = 1 + 2^k + 2^{2k}$ maradéka 7-tel osztva $1 + 2 + 4 = 7$ maradéka, azaz 0, ha meg $k = 3m + 2$, akkor $1 + 4 + 2 = 7$ adódik. Második megoldást kaphatunk annak felhasználásával, hogy $3 \nmid k$ esetén $1 + x + x^2 \mid 1 + x^k + 2^{2k}$, erről a körosztási polinomok kapcsán lesz majd szó.

29. Oldjuk meg a $3^n + 4^n = 5^n$ egyenletet a pozitív egész számok körében. □

Ha $n > 2$, akkor $3^n + 4^n = 9 \cdot 3^{n-2} + 16 \cdot 4^{n-2} < 9 \cdot 5^{n-2} + 16 \cdot 5^{n-2} = 5^n$. Az $n = 1$ nem jó, az $n = 2$ igen. A $3^n + 4^n < 5^n$ egyenlőtlenséget 4^n-nel való osztással is igazolhatjuk.

30. Igazoljuk, hogy végtelen sok $4k - 1$, illetve $6k - 1$ alakú (pozitív) prím van. □

Tegyük fel, hogy csak $p_1, \ldots, p_m$ ilyen. Az $N = 4p_1 \ldots p_m - 1$, illetve $N = 6p_1 \ldots p_m - 1$ számnak van $4k-1$, illetve $6k-1$ alakú prímosztója. Ez $p_1, \ldots, p_m$ mindegyikétől különböző.

31. Igazoljuk, hogy a $2^{2^n} - 1$ számnak legalább n különböző (pozitív) prímosztója van. □

Teljes indukcióval bizonyítunk, $n = 1$-re a 3 megfelelő. Nyilván $2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$, és itt a tényezők relatív prímek, hiszen páratlan számok, melyek különbsége 2. A második tényező nagyobb, mint 1, ezért van egy p_{n+1} prímosztója, ami tehát az első tényező prímosztóitól különböző. Utóbbinak az indukciós feltevés miatt van n darab különböző.

---

18. Határozzuk meg a $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$ számok legnagyobb közös osztóját. □

A $2n$ legnagyobb 2-hatvány-osztója, mert e számok összege 2^{2n-1}, és $k\binom{2n}{k} = 2n\binom{2n-1}{k-1}$.

19. Adjunk meg végtelen sok olyan n természetes számot, amelyre $n \mid 2^n + 1$ teljesül. □

$n = 3^k$ megfelelő (indukcióval, az $a^3 + 1 = (a+1)\big((a+1)^2 - 3a\big)$ azonosság miatt).

32. Adjuk meg az összes olyan (pozitív) prímszámot, aminek alkalmas (pozitív egész kitevős) hatványa felírható két pozitív egész szám köbének az összegeként. □

Eredmény: $(2^k)^3 + (2^k)^3 = 2^{3k+1}$, illetve $(2 \cdot 3^k)^3 + (3^k)^3 = 3^{3k+2}$. *Ötlet:* Használjuk az $a^3 + b^3 = (a+b)\big((a+b)^2 - 3ab\big)$ azonosságot annak megmutatására, hogy ha $p > 3$ prím, és $a^3 + b^3 = p^m$, akkor $p \mid a$ és $p \mid b$, majd osszunk p^3-nel.

33. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan nem konstans egész együtthatós $f(x)$ polinom, amely az x változó minden egész értékére prímet vesz fel. □

Legyen $p = f(0)$. Ekkor $p \mid f(pk)$ minden k-ra, így $f(kp) = \pm p$. De egy nem konstans polinom egy adott számot csak véges sok helyen vehet fel értékként (lesz algebrából).

34. Bizonyítsuk be hogy $k\ell + 1$ darab pozitív egész szám közül mindig vagy kiválasztható $k + 1$ darab olyan, amelyek közül egyik sem osztója a másiknak, vagy pedig $\ell + 1$ darab olyan, amelyek sorba rakhatók úgy, hogy mindegyik szám osztója a következő számnak. □

Indukció ℓ szerint, $\ell = 0$ esetén igaz. Legyenek $a_1, \ldots, a_m$ azok a számok, amelyek nem osztói semelyik másik megadott számnak. Nyilván mindegyik megadott szám osztója valamelyik a_i-nek. Ha $m \geq k + 1$, akkor $a_1, \ldots, a_m$ teljesítik az első feltételt. Ha $m \leq k$, akkor az a_i számokat hagyjuk el. Marad legalább $k(\ell - 1) + 1$ szám, alkalmazzuk az indukciós feltevést. Ha van $b_1 \mid \ldots \mid b_\ell$ sorozat, akkor b_ℓ osztója valamelyik a_i-nek, azt vegyük hozzá.