Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Az 5., 6. és 7. előadás-diához tartozó feladatsor

1. ***(1.3.11)*** Végezzük el az alábbi műveleteket: $(1+i)(3-2i)$, $1/i$, $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, $|(1+1526i)^{100}/(1-1526i)^{100}|$, $(1+i)^2$, $(1+i)^{1241}$, $(-1+i\sqrt{3})^3$.

2. Igazoljuk, hogy $z \in \mathbb{C}$ abszolút értéke akkor és csak akkor 1, ha z reciproka megegyezik a konjugáltjával. Mely $z \in \mathbb{C}$ esetén felcserélhető a képzetes rész és a konjugált képzése?

3. Legyen $z = 5 - 12i$. Mely valós c számokra teljesül, hogy $|cz| = 1$?

4. ***(1.3.14)*** Oldjuk meg $\mathbb{C}$-ben: $x = (3+2i)\overline{x}$; $x = 2\operatorname{Re}(x)$; $\operatorname{Re}(x) = x + \overline{x}$.

5. Tegyük föl, hogy $(x+iy)^n = 3 + 2i$ (itt $x, y \in \mathbb{R}$). Mennyi lesz ekkor $(x^2+y^2)^n$?

6. Soroljuk föl az első húsz pozitív egész számot, ami nem áll elő két négyzetszám összegeként. Mutassuk meg, hogy ha az m és n egész számok előállnak két négyzetszám összegeként, akkor mn is előáll így.

---

7. ***(1.3.12)*** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket: $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -12$, $x^2 + 2x + 2 = 0$, $x^2 + 2ix - 1 = 0$. Írjuk is föl a megfelelő polinomokat gyöktényezős alakban $\mathbb{C}$ fölött.

8. ***(1.3.13)*** Határozzuk meg azokat a $c + di$ számokat, melyek négyzete $20i - 21$. Oldjuk meg az $x^2 + (i-2)x + (6-6i) = 0$ egyenletet.

---

9. ***(1.4.2, 1.4.8)*** Hozzuk trigonometrikus alakra: $1 \pm i$, $\sqrt{3} + i$, $-1 - \sqrt{3}i$, $\cos(30°) - i\sin(60°)$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$, $(1+\sin\alpha + i\cos\alpha)(1+\sin\alpha - i\cos\alpha)^{-1}$, $(1+i\operatorname{tg}\alpha)/(1-i\operatorname{tg}\alpha)$. Mennyi $(1+\sin(\pi/5)+i\cos(\pi/5))^5 + i\,(1+\sin(\pi/5)-i\cos(\pi/5))^5$ és $4\cos(\pi/5)\sin(\pi/10)$?

10. Mennyi $\cos(-30°) - i\sin(-30)°$ szöge? Ha z szöge $40°$, akkor mennyi $1222/\overline{z}^{1222}$ szöge? Ha w abszolút értéke 1, szöge pedig $60°$, akkor mennyi $\overline{w}/w^2$?

11. ***(1.5.14)*** Oldjuk meg az $x^3 = 2$ és az $x^4 = -9$ egyenleteket a komplex számok között. Adjuk meg az $x^8 = \sqrt{3} - i$, $x^n = -1$ egyenletek összes megoldását is.

12. ***(2.5.10)*** Írjuk föl az $x^4 + 4$ polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Bontsuk a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára.

13. ***(1.5.24)*** Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$-et.

14. ***(1.5.23*)*** Hozzuk „zárt alakra” a következő összeget:

$$\binom{1867}{0} + \binom{1867}{4} + \binom{1867}{8} + \binom{1867}{12} + \dots .$$

15. ***(1.4.16**)*** Hozzuk zárt alakra a $\sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)$ összeget.

---

16. ***(1.4.9)*** Rajzoljuk le a komplex síkon a következő halmazokat: $\{z : \operatorname{Re}(z+2i) \le -2\}$, $\{z : \operatorname{Re}(z+1) \ge \operatorname{Im}(z-3i)\}$, $\{z : |z-i-1| \le 3\}$, $\{z : |z-3+2i| = |z+4-i|\}$, $\{z : z+\overline{z} = -1\}$, $\{z : 2z+5 = 2\overline{z}\}$, $\{z : 1/z = \overline{z}\}$, $\{z : (1/z)+8 = \overline{z}\}$, $\{z : |z| = iz\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}((z-1)/(z+1)) = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}((z-1)/(z+1)) = 0\}$.

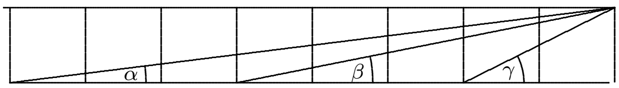
17. ***(1.4.10)*** A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z \mapsto 3z+2$, $z \mapsto (1+i)z$, $z \mapsto 1/\overline{z}$.

18. Igazoljuk, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege ugyanaz, mint az átlói hosszának négyzetösszege, és fogalmazzuk meg a megfelelő komplex azonosságot.

19. ***(1.4.11, 1.4.13*)*** Legyen $z, w \in \mathbb{C}$. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa. Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

20. ***(*)*** Egy medvesajtos dobozban a hat (60°-os) körcikkből három maradt, amik elmozdulhattak, de úgy, hogy csúcsuk továbbra is a doboz középpontjában van, a három A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ív pedig a doboz szélére illeszkedik ebben a sorrendben. Igazoljuk, hogy a B_1A_2, B_2A_3, B_3A_1 szakaszok (tehát nem az ívek!) felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

21. ***(*)*** Részlet egy négyzetrácsból. Igazoljuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 45°$.



22. ***(1.4.14, 1.4.15**)*** Mutassuk meg, hogy a z_1, z_2, z_3, z_4 páronként különböző komplex számok pontosan akkor vannak egy körön vagy egy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Big/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \in \mathbb{R}\ .$$

Igazoljuk Ptolemaiosz tételét: ha egy négyszög oldalainak hossza a, b, c, d, átlóinak hossza e és f, akkor $ac+bd \geq ef$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha a négyszög (konvex) húrnégyszög.

23. ***(**)*** Az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0)$$

függvényeket törtlineáris függvényeknek nevezzük. Ez az egyetlen ∞ szimbólummal kiegészített számsíkon (vagy ha úgy tetszik a komplex számgömbön) is értelmezhető (hogyan?). Igazoljuk, hogy a fenti f függvény akkor és csak akkor képezi a komplex egységkört saját magára úgy, hogy a kör belseje a kör belsejére képződik, ha felírható a következő alakban:

$$f(z) = k\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (|k| = 1, |\alpha| < 1).$$

Keressünk olyan törtlineáris függvényt, amely az egységkörvonalat a valós tengelyre, belsejét a felső félsíkra képezi. Igazoljuk, hogy kör képe is, egyenes képe is egyenes vagy kör minden törtlineáris leképezésnél (azaz kögyenes képe kögyenes; az egyenesek a ∞-en átmenő körök).

24. ***(*)*** Milyen alakzatot alkotnak azok a z pontok a komplex számsíkon, melyekre teljesül, hogy $(z - i)i/(z - 1)$ negatív valós szám?

25. ***(**)*** Legyen $A \neq B$ két pont a síkon és C_λ azon P pontok mértani helye a síkon, melyekre $PA/PB = \lambda$, ahol λ egy pozitív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy C_λ egy kör, ha $\lambda \neq 1$ (Apollóniusz-kör), és határozzuk meg a középpontját és a sugarát. Mi a helyzet, ha $\lambda = 1$? Bizonyítsuk be, hogy C_λ merőleges minden A-t és B-t összekötő egyenesre és körre.