Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

A 24. előadás-diához tartozó feladatsor

1. ***(3.1.29)*** Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölötti polinomok körében?

2. ***(3.3.14)*** Bontsuk $6(x^2-2)(x^2+1)$-et $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára.

3. ***(3.5.4)*** A Schönemann-Eisenstein kritérium az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül: $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ (mely n-ekre?).

4. ***(3.5.5)*** Legyen f racionális együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha valamelyik eltoltja (vagyis az $f(x+c)$ polinom, ahol $c \in \mathbb{Q}$) irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Igazoljuk ennek segítségével, hogy x^4+1 irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

5. ***(3.5.10)*** Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az x^4+x+1 polinom?

6. ***(3.5.11*)*** Legyen p prím, és $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n \geq 1$, és $0 < k < n$. Jelölje $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ az f-et modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

(1) Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött.
(2) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
(3) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.
(4) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
(5) Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ fölött k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.
(6) Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.

7. ***(3.5.6)*** A $6x^4+3x+1$ polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.

8. ***(3.5.9)*** Az x^4+x^2+x+1-et $\mathbb{Z}_2$ felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

9. Bontsuk $x^5-2x^4+3x^3+10x^2-2x+1$-et irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}$ fölött.

10. ***(3.5.14)*** Irreducibilis-e $\mathbb{Z}$ fölött $x^5+5x+26$, $3x^7+6x-18$, x^6+1, x^3+7x-3, $x^4+3x^3+x^2+1$?

11. ***(3.5.15*)*** Irreducibilisek-e az alábbi polinomok a $\mathbb{Q}$ test fölött? $3x^7-6x^6+6x^2+3x-2$, $3x^7+x^6+6x^2+2x-2$, $3x^7-6x^6+6x^2+2x-2$, $x^{16}+1$, $x^{16}+2$, x^4-14x^2+9, x^4-x^2+1, $3x^7+6x-18$, x^5+4, x^3+9, x^5+729, $x^{10}-x^5+1$, $x^{20}+20$, x^4+25, x^6+32, x^4+4x+1, x^4-2x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+4, $x^4+x^3+x^2+1$.

---

12. ***(3.3.19)*** Irreducibilis-e x^4+4 illetve x^4+9 a $\mathbb{Q}$ fölött? Általánosítsunk!

13. ***(3.3.24**)*** Bontsuk fel x^4-10x^2+1-et $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára (segítség: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ fölötti felbontást is. Bizonyítsuk be, hogy ennek a polinomnak semelyik eltoltja sem teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

14. ***(3.3.22**)*** Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor az $(x+y)^p - x^p - y^p$ polinom osztható p-vel $\mathbb{Z}[x,y]$-ban. Vezessük le ebből a kis Fermat-tételt.

15. ***(3.5.15**)*** Legyen p prím és $f(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$. Alkalmazható-e az $f(x+1)$ polinomra a Schönemann-Eisenstein?