**Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat**

*A 19. és 20. előadás-diákhoz tartozó feladatsor*

**1.** ***(1.1.8, 1.1.9)*** Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a $2:3$ osztást modulo 5. Tudunk-e osztani $\mathbb{Z}_5$ minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?

**2.** Hány nullosztó van $\mathbb{Z}_4$-ben? Hát $\mathbb{Z}_4[x]$-ben?

**3.** ***(2.2.32)*** Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_m$ gyűrűben a nullosztókat és az invertálható elemeket.

**4.** Adjunk meg egy olyan másodfokú $f \in \mathbb{Z}_6[x]$ polinomot, melyre $(3x+1)f(x)$ foka 2.

**5.** Adjunk példát, ami mutatja, hogy $\mathbb{Z}_6$ fölött nem igaz a polinomok azonossági tétele.

**6.** Hány olyan legföljebb negyedfokú polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$-ben, mely minden helyen 1?

**7.** Bontsuk $\mathbb{Z}_2$ fölött gyöktényezős alakra az $x^8+1$ polinomot.

**8.** ***(2.2.4, 2.2.7)*** Igazoljuk, hogy a kompozíció asszociatív. Mi az egységelem? Adjunk példát két geometriai transzformációra, ami mutatja, hogy a kompozíció nem kommutatív.

**9.** ***(2.2.35)*** Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? Amelyek gyűrűk, azokban mik az invertálható elemek?

(1) $\{a+bi \,:\, a,b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
(2) $\mathbb{G} = \{a+bi \,:\, a,b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve (*Gauss-egészek*).
(3) $\left\{a+b\sqrt{2} \,:\, a,b \in \mathbb{Q}\right\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
(4) $\left\{a+b\sqrt[3]{2} \,:\, a,b \in \mathbb{Q}\right\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
(5) A páratlan, illetve a 2-hatvány nevezőjű törtek $\mathbb{Q}$ műveleteire nézve.
(6) Egy $X$ halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)

**10.** ***(2.2.36)*** Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_6$ gyűrűben $R = \{0,2,4\}$ részgyűrűt alkot. Egységelemes gyűrű-e, illetve test-e az $R$ gyűrű?

**11.** ***(2.2.41)*** Legyen $R$ kommutatív, egységelemes gyűrű, és tekintsük az $a+bi$ alakú formális kifejezéseket, ahol $a,b \in R$ (az $R$ fölötti komplex számokat). A műveleteket ugyanúgy végezzük, mint a közönséges komplex számokkal. Testet kapunk-e, ha $R = \mathbb{Z}_3$? És ha $R = \mathbb{Z}_5$?

**12.** ***(2.2.20*)*** Igazoljuk az $a^m a^n = a^{m+n}$ és az $(a^m)^n = a^{mn}$ azonosságokat tetszőleges egységelemes gyűrű $a$ invertálható elemére ($m$ és $n$ egészek, de lehetnek negatívak is).

**13.** ***(2.2.37*)*** Legyen $R$ gyűrű, $r,s \in R$, és $m,n$ egész számok. Igazoljuk az alábbiakat.

(1) $(-n)r$ az $nr$ ellentettje.
(2) $mr + nr = (m+n)r$.
(3) $n(mr) = (nm)r$.
(4) $n(r+s) = nr + ns$.
(5) $n(rs) = (nr)s = r(ns)$.

**14.** ***(2.2.40**)*** Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ az $a+b\sqrt{2}$ alakú számok gyűrűjét a $\mathbb{C}$-beli összeadásra és szorzásra, ahol $a,b \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy ebben végtelen sok invertálható elem van.