Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Az 16. és 17. előadás-diákhoz tartozó feladatsor

1. Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

2. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determináns második és harmadik oszlopa egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?

3. Oldjuk meg a Cramer-szabállyal az $x + y = 1$, $x + 2y = 2$ egyenletrendszert.

4. Írjuk fel $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ inverzében az első sor második elemét a ferde kifejtési tétel alapján.

5. Legyenek A, B, C olyan $n \times n$-es mátrixok, melyekre $\det A = 3$, $\det B = 6$, $\det C = 4$. Mennyi lesz az $A^3B^{-1}CA^{-2}$ mátrix determinánsa?

6. *(*)* Legyen M egy 3×3-as valós mátrix, melyre $M^T = -M$. Mutassuk meg, hogy a determinánsa nulla. A 3 helyett milyen n egészekre lesz biztosan igaz az analóg állítás?

7. *(*)* Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.

8. *(*)* Mely n-ekre van olyan $n \times n$-es mátrix, melynek elemei csak 0 és 1, és determinánsa 2?

9. *(**)* Egy determináns egyik kifejtési tagját tükrözzük a determináns mellékátlójára. Hogyan változik meg a megfelelő permutációban az inverziók száma?

---

10. *(*)* Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.

11. *(*)* Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.

12. *(*)* Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X \in \mathbb{R}^{k \times m}$ és 0 az $m \times k$-as nullmátrix. Rakjuk össze az M mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen: $M := \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

13. *(**)* Legyenek A és B $n \times n$-es mátrixok, E az $n \times n$-es egységmátrix, 0 pedig a nullmátrix. Az $\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}$ blokkmátrixot megfelelően Gauss-eliminálva adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzástételére.

14. *(**)* Igazoljuk, hogy ha M egy nilpotens mátrix (azaz valamelyik hatványa 0), akkor $E - M$ invertálható (itt E az egységmátrix).

15. *(**)* Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, és ε_j a $2\pi j/n$ szöghöz tartozó n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1}).$$