Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

A 14. és a 15. előadás-diákhoz tartozó feladatsor

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a felső háromszög alakra hozás módszerével, azaz Gauss-eliminációval, az első sor, illetve az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, végül a 3×3-asokat a Sarrus-szabállyal is.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Ha egy $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrixra $\det A = 5$, akkor mennyi $\det(A + A)$?

4. Egy 1222×1222-es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?

5. Egy egész elemű determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.

6. Egy 3×3-as determináns egyjegyű számokból áll. Minden sorban a három számjegyből alkotott háromjegyű szám héttel osztható. Igazoljuk, hogy a determináns osztható héttel.

7. Hány inverzió van az alábbi permutációkban, illetve a ‘hátulról előre’ permutációban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

8. Hány inverzió lehet maximum egy 5 elemű halmaz egy páratlan permutációjában?

9. ***(K4.2.25)*** Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

$$(1234)(35)(1432)(35)\,, \quad (12345)(234)(12345)^{-1}\,, \quad [(12)(23)(34)]^{1222}\,.$$

Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \dots, n\}$-en értelmezett „hátulról előre” permutációval is.

10. ***(K4.2.23)*** Igazoljuk, hogy $(x_1 \dots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3)\dots(x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$.

11. ***(K4.8.14)*** Mutassuk meg, hogy $f \circ \big(x_1 \dots x_k\big) \circ f^{-1} = \big(f(x_1)\dots f(x_k)\big)$ (itt $f \in S_n$ és $(x_1 \dots x_k)$ egy tetszőleges ciklus S_n-ben).

12. ***(K4.2.31*)*** Mely $f \in S_n$ permutációk cserélhetők föl az $(1, 2, \dots, n)$ ciklussal?

13. ***(K4.2.30)*** Igazoljuk, hogy minden páros permutáció hármasciklusok szorzata.

14. ***(K4.2.32*)*** Igazoljuk, hogy egy permutáció pontosan akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusok nélkül).