Bsc algebra és számelmélet normál gyakorlat

Második zárthelyi (2023. december 15.) — eredmények és pontozás

1. $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)(\varepsilon_2, \varepsilon_6)(\varepsilon_5, \varepsilon_7)$ (3 pont), ezért ez páratlan permutáció (1 pont). A determináns értéke 9 (akár eliminációval, akár kifejtéssel).

2. $\sigma_1 = -2/3$, $\sigma_2 = 5/3$, $\sigma_3 = 4/3$, a négyzetösszeg $4/9 - 2 \cdot 5/3 = -26/9$, a reciproköszeg $5/4$ (3 pont). Az osztásnál a hányados $x^4 + x^3 + x^2 + 1$, a maradék x.

3. $216/360 = 3/5$, a rend tehát 5 (2 pont). Nyilván $2^k \equiv 1$ (35) akkor és csak akkor, ha a kongruencia mod 5 és mod 7 is fennáll. De $o_5(2) = 4$ és $o_7(2) = 3$, ezért a keresett rend $[4, 3] = 12$. *Második megoldás:* $\varphi(35) = 24$ maximális osztói 12 és 8, a 12 jó kitevő, mert $35 \mid 4096 - 1$, a 12 maximális osztói 6 és 4, amik nem jó kitevők, ezért $o_{35}(2) = 12$.

4. Pl. $b = 10$, $c = 6$ (2 pont). Jacobi-szimbólumokkal egy lehetséges számolás:

$$\left(\frac{77}{103}\right) = \left(\frac{103}{77}\right) = \left(\frac{26}{77}\right) = \left(\frac{2}{77}\right)\left(\frac{13}{77}\right) = (-1)\left(\frac{77}{13}\right) = -\left(\frac{-1}{13}\right) = -1\,.$$

Egy másik:

$$\left(\frac{77}{103}\right) = \left(\frac{7}{103}\right)\left(\frac{11}{103}\right) = (-1)^2\left(\frac{103}{7}\right)\left(\frac{103}{11}\right) = \left(\frac{-2}{7}\right)\left(\frac{4}{11}\right) = \left(\frac{-1}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right) \cdot 1 = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1\,.$$

5. A táblázat:

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

(1 pont).

Logaritmust véve $8y \equiv 6$ (10) (1 pont), ahonnan $y \equiv 2, 7$ (10) (1 pont), így $x \equiv 4, 7$ (11) (1 pont).

6. Ha n egy prímszám négyzete, akkor megfelel (1 pont). Más megoldás nincs (1 pont), mert ha n prím, az nem jó (1 pont), ha meg $1 < d < n$ osztója n-nek, akkor n/d is, és a kettő közül a nagyobbiknak a négyzete $> d(n/d) = n$ (2 pont). Ezért $d = n/d$ az egyetlen nemtriviális osztó, azaz d prím és $n = d^2$ (1 pont).