Bsc algebra és számelmélet normál gyakorlat

Első zárthelyi (2023. október 20.) — eredmények és pontozás

1. A szokásos algoritmussal számolva az eredmény $x = 6+35u$ és $y = 1-19u$ (2 pont), az egyetlen pozitív megoldás $x = 6$ és $y = 1$ (1 pont). Mivel 123456789123 hárommal osztható, de páratlan, ezért kongruens 3-mal mod $\varphi(9) = 6$. Továbbá $(16, 9) = 1$ és $16 \equiv -2$ (9), ezért az Euler–Fermat-tétel miatt a keresett maradék kongruens $(-2^3) = -8 \equiv 1 \bmod 9$ (2 pont). Osztható néggyel, így az 1, 10, 19, 28 közül az utolsó lesz a jó eredmény (1 pont).

2. -2, $2(\cos 36° + i \sin 36°)$, $2(\cos 108° + i \sin 108°)$, $2(\cos 252° + i \sin 252°)$, $2(\cos 324° + i \sin 324°)$ (2 pont, rossz ábrázolásért egy pont levonás). Az $|x + iy + 1| \le |x - iy - 1 - i|$ egyenletet négyzetre emelve $(x + 1)^2 + y^2 = (x - 1)^2 + (-y - 1)^2$, ahonnan $y = 2x - (1/2)$ (3 pont), az eredmény az ezen egyenes által határolt felső félsík (1 pont). *Második megoldás:* A $|w| = |\overline{w}|$ azonosságot $w = \overline{z} - 1 - i$-re alkalmazva kapjuk, hogy a határoló egyenes a -1 és az $1 - i$ felező merőlegese.

3. Ha $d \mid 7a+5b$ és $d \mid 5a+3b$, akkor $d \mid 5(7a+5b)-7(5a+3b) = 4b$ és $d \mid 3(7a+5b)-5(5a+3b) = -4a$, azaz $d \mid (4a, 4b) = 4(a, b) = 4$ (2 pont). A 4 mindegyik osztóját meg is valósíthatjuk, ha $a = 0$ és $b = 1, 2, 4$ (1 pont). Az Euler–Fermat-tétel miatt $n^7 - n + 5 \equiv 5$ (7) és $5^6 \equiv 1$ (7), ezért a kérdéses kifejezés mindig osztható 7-tel (2 pont). De nagyobb, mint 7, ezért soha nem lesz prím (1 pont).

4. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ (2 pont).}$$

Az u és v szabad, $x = v/2$ és $y = u + (v/2)$. (Más paraméterezés is lehetséges.)

5. A racionális gyökteszt alapján ha p/q racionális gyök és $(p, q) = 1$, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 3$ (1 pont). Az $x + 1/3$-ot kétszer Hornerrel kiemelhetjük (2 pont), az eredmény $(3x + 1)^2(x^2 + x + 1)$ (1 pont). A második tényező gyökei $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$, egyszeresek, a $-1/3$ pedig kétszeres gyök (2 pont).

6. A bal oldalt szorzattá alakítva $(x + 2y)(x + 3y) = 3$ (2 pont), ezért négy eset van, mert az első tényező ± 1 vagy ± 3 lehet (2 pont). Mindegyik esetben egy lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Az eredmény $(x, y) = (3, -2), (-3, 2), (7, -2), (-7, 2)$ (2 pont).