Bsc algebra és számelmélet normál gyakorlat

Második zárthelyi (2023. december 15.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges** (a számolás részletei), a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 6 pontosak. Az első három feladatból 12 pontot el kell érni az elégségeshez, ha ez megvan, akkor a ZH jegye az összpontszám hatoda. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. **A név és a NEPTUN-kód minden lapon szerepeljen.**

1. Tekintsük azt a permutációt a 8-adik egységgyökök $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_8 = 1\}$ halmazán, amely minden elemet köbre emel. Számítsuk ki ennek a ciklusfelbontását és előjelét (4 pont). Számítsuk ki azt a 4×4-es determinánst, amelyben a főátló minden eleme 1, a mellékátló minden eleme 2, a többi elem pedig nulla (2 pont).

2. Határozzuk meg a $3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$ polinom gyökeinek négyzetösszegét és a gyökök reciprokainak összegét (3 pont). Végezzük el az $x^6 + x^4 + 1 : x^2 + x + 1$ maradékos osztást $\mathbb{Z}_2$ fölött (3 pont).

3. Határozzuk meg $\cos 216° + i \sin 216°$ rendjét (2 pont). Mennyi 2 rendje mod 35 (4 pont)?

4. Adjunk meg b és c pozitív egészeket úgy, hogy az $x^9 + 3bx^5 + 15c$ polinom a $2, 5$ prímek mindegyikére teljesítse a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét, de más prímekre ne (2 pont). Döntsük el, hogy 77 kvadratikus maradék-e modulo 103 (4 pont).

5. Legyen $p = 11$. Készítsünk logaritmustáblát a $g = 2$ primitív gyökre nézve, majd adjuk meg az $x^8 \equiv 9$ (11) kongruencia összes megoldását mod 11.

6. Mely $n > 0$ egészekre lesz az n szám 1-től és n-től különböző pozitív osztóinak négyzetösszege n?