

Bsc algebra és számelmélet normál gyakorlat

Első zárthelyi (2023. október 20.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges** (a számolás részletei), a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 6 pontosak. A dolgozatban 12 pontot el kell érni az elégségeshez, ha ez megvan, akkor a ZH jegye az összpontszám hatoda. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. **A név és a NEPTUN-kód minden lapon szerepeljen.**

1. Adjuk meg a $19x + 35y = 149$ egyenlet összes megoldását, majd azokat, ahol x és y is pozitív egész (3 pont). Számítsuk ki $16^{123456789123}$ osztási maradékát 36-tal osztva (3 pont).
2. Számítsuk ki (trigonometrikus alakban) és ábrázoljuk a -32 komplex szám összes ötödik gyökét (2 pont). Ábrázoljuk azoknak a z komplex számoknak a halmazát a síkon, melyekre $|z + 1| \leq |\bar{z} - 1 - i|$ (4 pont).
3. Ha a és b relatív prímekek, akkor mik $7a + 5b$ és $5a + 3b$ legnagyobb közös osztójának lehetséges (pozitív) értékei? Mindegyikhez adjunk is meg egy-egy konkrét a és b egész számot, ami megvalósítja (3 pont). Mely $n \geq 0$ egészekre lesz $(n^7 - n + 5)^6 + 6$ prímszám? (3 pont).
4. Adjuk meg Gauss-eliminációval az $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ lineáris egyenletrendszer általános megoldását. Jelezzük is, melyek a szabad változók.
5. Határozzuk meg $9x^4 + 15x^3 + 16x^2 + 7x + 1$ racionális, majd az összes komplex gyökeit is, és ezek multiplicitását.
6. Oldjuk meg az $x^2 + 5xy + 6y^2 = 3$ diofantikus egyenletet.