$M \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ $\qquad m$ min pol $\mathbb{Q}$ fölött

n — " — $\mathbb{C}$ — " —.

$m = n$.

m a legalacsonyabb fokú $\mathbb{Q}(x)$-beli, amire M gyöke.

n — " — $\mathbb{C}(x)$ — " — " —

$a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$ "jó" $\qquad a_0 E + a_1 M + \dots + a_k M^k = 0$

alacsonyabb fokúra nem megy $\qquad b_0 E + b_1 M + \dots + b_{k-1} M^{k-1} = 0$

miatt csak úgy

$b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$

nem mind 0

Ha $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ $\qquad a_0 E + \dots + a_k M^k = 0$

$\Rightarrow$ vannak $b_0, \dots, b_k \in \mathbb{Q}$: $b_0 E + \dots + b_k M^k = 0$

nem mind 0

$x_0 E + \dots + x_k M^k$

homogén lin. egyenletrendszer, rac. együtthatókkal.

$m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$

$\underbrace{b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k}_{g(x)}$ gyöke M.

$m(x) \mid g(x)$ egyenlő fokú $\qquad a_k = b_k = 1$

$m(x) \cdot z = g(x)$. $\Rightarrow z = 1$

$\Rightarrow m(x) = g(x)$

$x + y = 0$ $\exists\, \mathbb{C}$ $i + (-i) = 0$

$(1 \quad 1 \mid 0)$

x y y valód x között $(-y, y)$.

Homogén lin. egy. rsz. $\mathbb{Q}$ fölött

$\exists$ nemtriv. megoldása $\mathbb{C}$ fölött

$\Rightarrow \exists\ \mathbb{Q}$ fölött is.

Biz. Ha nincs valód változó

$\Rightarrow$ megoldás egyért. és ez a 0.

De ez $\notin$ most nemtriv. megoldás $\mathbb{C}$ fölött.

$\Rightarrow \exists$ valód változó. $\sim y \neq 0$ szc.

$\Rightarrow \exists$ nemtriv. m.o. $\mathbb{Q}$ fölött.

$A, B \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ hasonlók $\mathbb{C}$ fölött.

Hasonlók-e $\mathbb{Q}$ fölött?

Tétel IGEN.

Biz. $S^{-1} A S = B$ $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\Updownarrow$ $\exists$-e $\mathbb{Q}$-beli elemű is?

$AS = SB$ homlin egy.-rendszer S elemeire racionális együtthatókkal.

$\det S' \neq 0$ is kellene.

S elemei ismeretlenek $\exists$ $x_1 \ldots x_k$ szabad változók, a többi elem ezek lin. komb.

$\left[S' = x_1 M_1 + \ldots + x_k M_k \right.$

$\left. M_1 \ldots M_k \in \mathbb{Q}^{n \times n} \right]$

S' $x_1 \ldots x_k$ lineáris kif.-ai az elemek racionális együtthatókkal. $\det(S') = f(x_1 \ldots x_k)$

$\in \mathbb{Q}[x_1 \ldots x_k]$.

$\exists z_1 \ldots z_k \in \mathbb{C}$: $f(z_1, \ldots, z_k) \neq 0$.

$\Rightarrow$ f nem a 0 polinom.

Áll. $f \in \mathbb{Q}[x_1 \ldots x_k] \Rightarrow \exists q_1 \ldots q_k \in \mathbb{Q}$
$f(q_1 \ldots q_k) \neq 0$.

Ha f 1-változós: pol-ok azonossági tétele.
f fok n $\Rightarrow$ $\leq$ n pont helyet $\mathbb{Q}$ végtelen.

Többváltozósra k szerinti indukció.

0^* $f = g_0 + g_1 x_k + g_2 x_k^2 + \ldots$ $g_i \in \mathbb{Q}[x_1 \ldots x_{k-1}]$.
$\exists i$: $g_i \neq 0$. $\underset{\text{ind. felt}}{\Rightarrow}$ $\exists q_1 \ldots q_{k-1}$
$g_i(q_1, \ldots, q_{k-1}) \neq 0$

g_i-be is behelyettesítjük $f \to b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$
b_i $\neq 0$ $\exists q_k$ q_k-t
behelyettesítve $\neq 0$.

V/14. $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ Ugy. é zac.

A Jordan-alakú $\mathbb{C}$ mc. $\to B$

$\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{Q}$, $0, 1 \in \mathbb{Q}$ A, B hasonló $\mathbb{C}$ fölött

$\Rightarrow$ hasonlóak $\mathbb{Q}$ fölött is. $\mathbb{Q}$ fölött is $\exists$ bázis, amiben Jordan-alakú.

V/7 $M \in T^{n \times n}$

és $M^N = 0 \Rightarrow M^n = 0$.

Cayley-Hamilton-ból köv. $M^N = 0 \Rightarrow$ $m_M \mid x^N \Rightarrow$ $m_M(x) = x^k$ $\mid k(x)$ n.fokú $\Rightarrow k \leq n$.

Newton-Girard V/7 2. felb.

$[A] = M$

$\operatorname{Im} A \supseteq \operatorname{Im} A^2 \supseteq \operatorname{Im} A^3 \supseteq \dots \supseteq \operatorname{Im} A^N = 0$

Ha $A^N = 0$

ha $\operatorname{Im} A^i = \operatorname{Im} A^{i+1} \Rightarrow \operatorname{Im} A^{i+x} = \operatorname{Im} A^i$

$\Rightarrow \operatorname{Im} A^i = 0$.

V/12.

$[A] = M$.

Bázis lesz $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$

A-t ezekre nézve $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$b_1 \xrightarrow{A} b_2 \xrightarrow{A} b_3 \cdots \xrightarrow{A} b_n$$

$$f(x) = a_0 1 \cdots + \underset{1}{a_n} x^n$$

$$f(A) = 0$$

$$f(A)(v) = \underbrace{a_0 v + a_1 Av + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}v + A^n v}$$

$$A^n v = -a_0 v - a_1 v \cdots - a_{n-1}A^{n-1}v$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} v \to Av & Av \to A^2v & \ldots & A^{n-1}v \to ? \end{array} \\ \begin{array}{c} v \\ Av \\ \vdots \\ A^{n-1}v \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & & \\ 0 & \vdots & & 0 & \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

m_A foka $\geq n$ mert $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ F

Ez jó: $m_A = f$

$k_A = (-1)^n f$.

elég, mert $m_A \mid k_A$ n-fokú

Hf $f(A) = 0$.

$n \times n$-es M mátrix kell

$f(x)$ k-adfokú, normált

$m_M = f$.

<u>Példa</u> $\mathbb{R}$ felett $f(x) = x^2+1$ s.é. $\pm i$

3×3-as mátrix van-e? $(x+i)^1(x-i)^1$

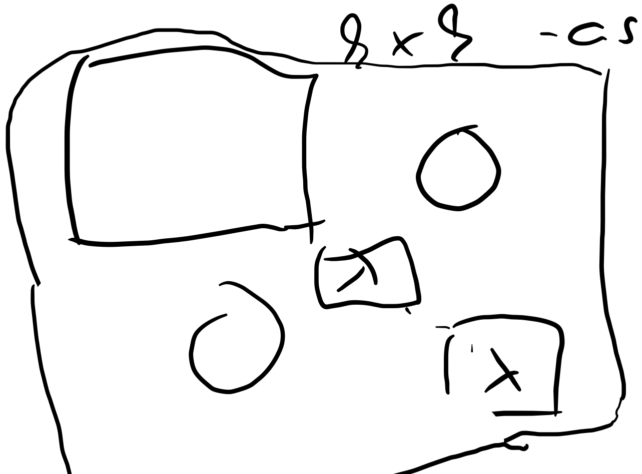
Jordan-alakban. $\forall$ s.é.-hez 1×1-es.

$$\begin{bmatrix} \boxed{+i} & & \\ & \boxed{+i} & \\ & & \boxed{i} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i & & \\ & -i & \\ & & -i \end{bmatrix}$$

$k(x)$ nem valós.

$\mathbb{C}$ felett igaz. $m(x) = f(x)$ k-adfokú

$k \times k$-as jó $\quad$ λ s.é. $\quad$ $\lambda \in \mathbb{C}$



jó lesz.

$x-\lambda \mid m(x)$.

V/13

$$J = \lambda E + N$$

$$J^k = \lambda^k E + \binom{k}{1}\lambda^{k-1}N + \underbrace{\binom{k}{2}\lambda^{k-2}}N^2 + \dots$$

binom. tétellel

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad N^i = {}_{i+1}\begin{bmatrix} & & 0 \\ 1 & & \\ 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(J) = ? \qquad f(x) = \sum a_i x^i$$

előző

$$\left(x^n\right)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)\,x^{n-k}$$

(k)-adik derivált

V/15

$$
\begin{array}{c|c}
 & b_1 \;\cdots\; b_k \\
\hline
\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{matrix} &
\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix}
\end{array}
= [A] = J
$$

$$
\text{HF } [A]_{b_k, b_{k-1}, \dots, b_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} = J^T
$$

Jordan-blokkban megfordítjuk a bázissorrendet akkor a transzponáltat kapjuk.

$A \sim A^T$ ha A Jordan-alakú.

$S^{-1} B S$ Jordan $\quad (S^{-1}BS)^T \sim S^{-1}BS$

$\underset{=A}{B} \sim A \Rightarrow B^T$ is $\sim A^T \sim B^T$

$(S^{-1}BS)^T = S^T B^T (S^{-1})^T = S^T B^T (S^T)^{-1}$

$S^{-1\,T} = (S^T)^{-1} \quad (SS^{-1} = E \Rightarrow E = E^T = (S^{-1})^T S^T)$

V/16 A, B négyzetes $\mathbb{C}$ fölött

$M \xmapsto{X} AM - MB$ bijektív

$\iff$ A-nak és B-nek nincs közös s.é.-e.

$\operatorname{Ker} X \overset{?}{=} 0$ $(AM = MB.)$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = A \qquad \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 x & a_1 y \\ a_2 u & a_2 v \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_1 x & b_2 y \\ b_1 u & b_2 v \end{bmatrix}$$

Ha $\exists$? $M \neq 0$

$a_1 x = b_1 x$ Ha $x \neq 0$ $a_1 = b_1$

$a_1 y = b_2 y$ $y \neq 0$ $a_1 = b_2$

$a_2 u = b_1 u$ $\vdots$

$a_2 v = b_2 v$.

If

$$\left.\begin{matrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = A \\ \\ B = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{bmatrix} \end{matrix}\right\}$$

$AM = MB \qquad M = ? \qquad M \neq 0.$

λ s.é. A-nak, B-nek E_1 mérete $= A$ mérete

E_2 " B "

$$(A - \lambda E_1)M = M(B - \lambda E_1)$$

$$-\lambda M \quad \Updownarrow \quad -\lambda M$$

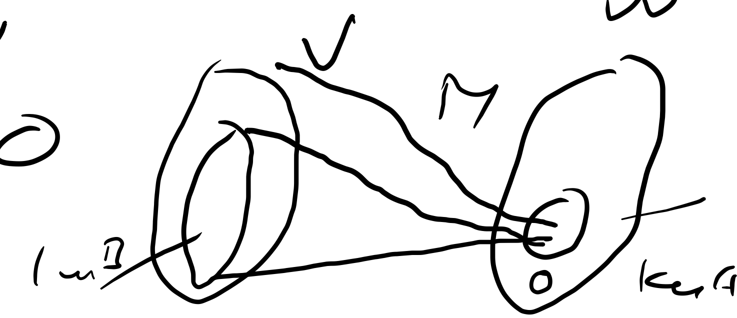
$$AM = MB.$$

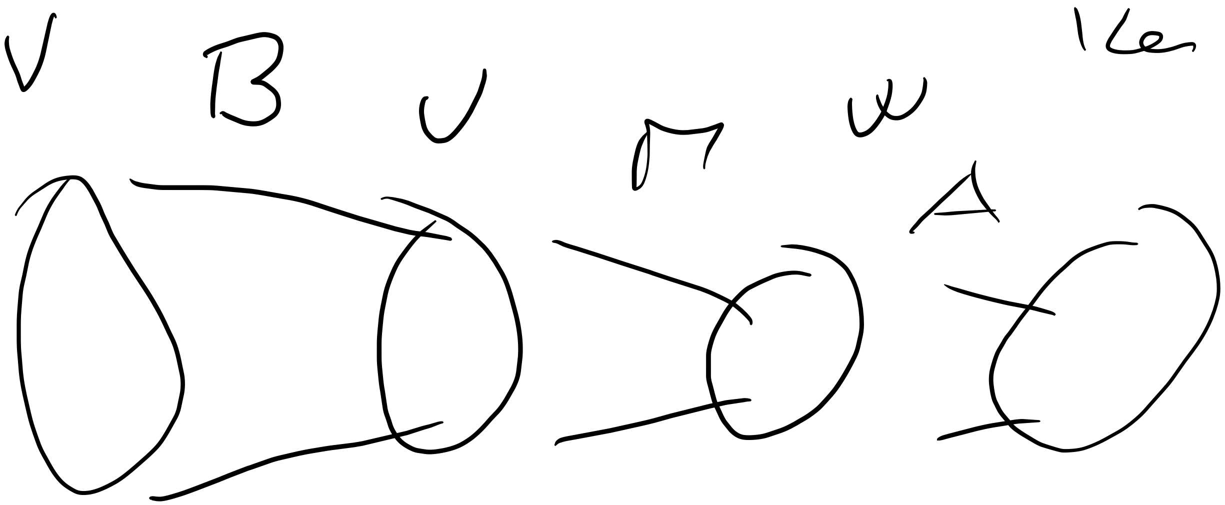
Feltehető, hogy $\lambda = 0$. Kell $M \neq 0$

$AM = MB$ A, B nem invertálé

$\operatorname{Im} B < V$

$\operatorname{Ker} A > 0$





M: $\operatorname{Im} B$-t 0-ba

$MB = 0$

és

$\operatorname{Im} M \subseteq \operatorname{Ker} A$

$AM = 0.$

Megfordítás : ha nincs közös s.é

$\Rightarrow M = 0.$

$AM = MB$

$Bv = \lambda v \qquad A(\underbrace{M(v)}) = MBv = M\lambda v = \lambda \underbrace{M(v)}$

Ha nincs közös s.é $\Rightarrow M(v) = 0.$

$$B = \begin{array}{c} \\ w \\ v \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} w & v \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

$Bv = \lambda v$

$Bw = \lambda w + v$

$(B - \lambda E)v = 0$

$\underbrace{(B - \lambda E)w = v.}$

$\lambda = 0$

$Bv = 0 \qquad Bw = v \qquad B^2 w = 0.$

$AM = MB \;/\, w \qquad Mv = 0$

$A(M(w)) = M(Bw) = v \quad = M(v) = 0$

0 nem s.é A-nak $\Rightarrow M(w) = 0$ ... $\forall$ cikl. s altérre

$M(w) = 0$

Jordan s.a.
cikl. s.a.
szerinti
a többit
$\Rightarrow M = 0.$

V/17.

$$U \oplus W = V$$

$U \cap W = 0$ $U + W = V$

$v \longleftrightarrow (u, w)$ $u \in U$ $w \in W$.

$$V_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = V = (V_1 \oplus U_2) \oplus U_3$$

$(v_1, v_2, v_3) \longleftrightarrow v$ $(V_1 + U_2) \cap U_3 = 0$

<u>Tétel</u> $V_1, \dots, V_n$ alterek V-ben

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$$

Def: ha $U_1 + \dots + U_n = V$ és

$\forall i$ $U_i \cap (U_1 + U_2 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n) = 0$.

$\iff$ v $\forall$ előáll egyért. $u_1 + \dots + u_n$ $u_i \in U_i$

$\iff \forall u_i \in U_i$ $\forall i$

↗ nem 0 vektorok összege nem 0.

$\iff$ ↗ lin függetlenek.

$\sum \lambda_i v_i = 0$ $\lambda_i v_i \in U_i$ $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0 \Rightarrow u_1 = \dots = u_n = 0$.

$V_1 \cap (V_2 + V_3) = 0$

$v_1 + v_2 + v_3 \qquad v_1, v_2, v_3 \neq 0.$

$\Rightarrow v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$ Tfh $= 0$

$-v_1 = v_2 + v_3$

$\in V_1 \qquad \in V_2 + V_3$

$V_1 \cap (V_2 + V_3) = 0 \Rightarrow v_1 = 0$ ↯.

Further is the $v \in V_1 \cap (V_2 + V_3)$ $v \neq 0$

$0 \neq v = v_2 + v_3$

↗ leads is as each non 0

$\underbrace{\underset{0}{\underset{\not\shortparallel}{-v}} + v_2 + v_3 = 0}$

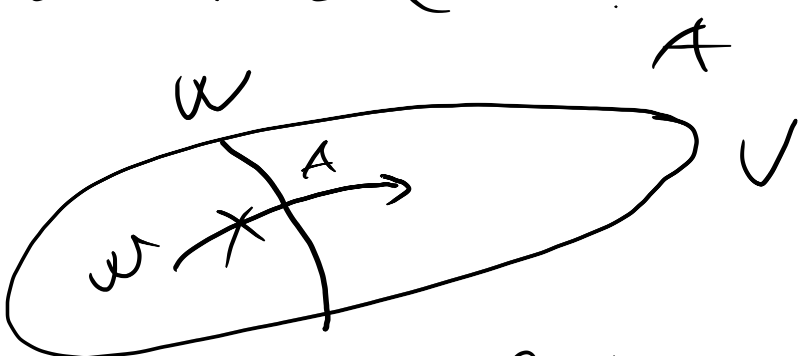
T(17) $U_1 \dots U_k$ s. altere
$\lambda_1 \quad \lambda_k$ páronként kül.

$\Rightarrow U_1 + \dots + U_k$ direkt összeg.

$\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i \ \lambda_i v_i = 0.$

EA. Közöl s.v.-hoz tartozó sv. F.

A-invariáns altér. $A \in \mathrm{Hom}(V)$



$w \in W$
$\Rightarrow A(w) \in W.$

Példa sajátaltér. $\forall$ altere.
W dimenzió $Aw = \lambda w \in W.$
$\{0\}$, V $\mathrm{Ker}A$ és $\mathrm{Im}\,A$. A-inv.

V/18. $m_A = fg \quad (f,g)=1$

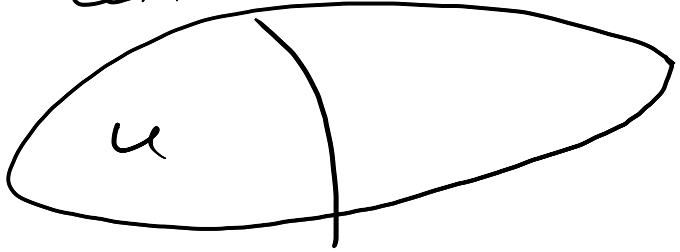
$\Rightarrow V = \underbrace{\operatorname{Ker} f(A)} \oplus \operatorname{Ker} g(A)$

(Freud.)

A-t csak $\operatorname{Ker} f(A)$-n tekintve, akkor itt f a min. pol.

$U = \operatorname{Ker} f(A)$ A-inv.

$B = A|_U$



$f(A)(u) = 0 \qquad f(B)(u) = 0$

m_B valódi osztója f-nek? H.

($m_B g(A)$ V-n azonosan 0 lenne, $fg \mid m_B g$.)

$$V = U \oplus W$$

A-invariánsak

U W szerint

$$[A] = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$$m_A(x) = \underbrace{(x-\lambda_1)^{u_1}}_{f} \underbrace{\cdots (x-\lambda_s)^{u_s}}_{g}$$

$\mathbb{C}$ felett

$$\underbrace{\operatorname{Ker} f(A)}_{} \oplus \underbrace{\operatorname{Ker} g(A)}_{\text{tovább bontható.}}$$

$$m_B = (x-\lambda_1)^{u_1}$$

V/15 HF, Fread

V/20 A $n\times n$

$\lambda_1 \text{———} \lambda_n$

s.o. pkint kül.

$m(x) = (-1)^n k(x) = \prod (x-\lambda_i)$

invariáns alterek?

$$
\begin{array}{c|cc}
 & b_1 & b_2 \\
b_1 & 2 & 0 \\
b_2 & 0 & 3
\end{array}
$$

$\{0\}$ egész

sajátalterek $\langle b_1 \rangle$ $\langle b_2 \rangle$.

$A b_1 = 2 b_1$

$A b_2 = 3 b_2$

$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$

$v \in W$ W inv. altér

$A(v) \in W$

$A(v) = 2\lambda_1 b_1 + 3\lambda_2 b_2$

$2v = 2\lambda_1 b_1 + 2\lambda_2 b_2$

$-$ $\lambda_2 b_2 \in W$.

ha $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow b_2 \in W$.

ha $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

$b_1, b_2 \in W \Rightarrow W$ az egész.

$v = 0$

ha $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow b_1 \in W$.

Ha $\forall v \in W$ $\lambda_1 = 0$

$\Rightarrow W = \langle b_2 \rangle$ vagy $\langle 0 \rangle$.

$BA = AB$

A n kül. s.é. ~> B diag-ható
páronként kül.

A $\forall$ sajátaltere B-invariáns. T/19

b_1 ——— b_n sajátbázis

$\langle b_1 \rangle$ sajátaltér $\Rightarrow$ B-inv.

$Bb_1 \in \langle b_1 \rangle \Rightarrow Bb_1 = \mu b_1$

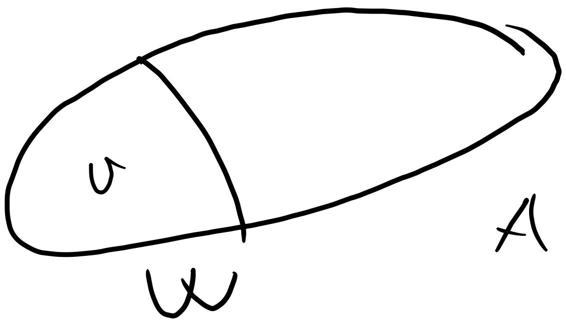
$\Rightarrow b_1$ sajátvek. B-nek.

$\Rightarrow b_1$ ——— b_n sajátbázis B-nek.

T/2) (2 | [unclear] $v, Av, \ldots, A^k v$

ha $A^l v \in \underbrace{\langle v, Av, \ldots, A^{l-1} v \rangle}_{F}$

invaltér



V

A   W A-invariáns

$A|_W = B$ min. pol-ja m_B

$m_B \mid m_A$

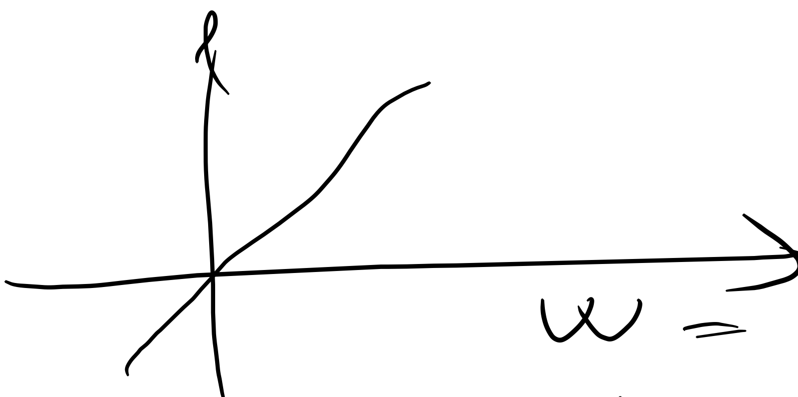
mert $m_A(A)$ W-n is 0.

$\underbrace{m_A = fg}$ $\ker f(A) = W$

$\nearrow$ $m_B \mid f$ H $m_B \overset{?}{=} f$

$B = A|_W$ $W = \ker f(A)$

$A = 0$ 2-dim.



$A|_W = B$

min pol λ

A min pol x

W = x-tengely.

W = sík [illegible] $A|_W = A$ min pol. x.

V/21 ∀k-ra van k-dim. inv. altér.

$n \times n$ mátrix

Jordan-alakban ábrázolva.

$Ab_n = \lambda b_n$

$\langle b_n \rangle$ inv. 1-dim.

$\langle b_{n-1}, b_n \rangle$ inv. 2-dim

$Ab_{n-1} = \lambda b_{n-1} + b_n$ HF minden más.

$\dots$

$\langle b_k, b_{k+1}, \dots, b_n \rangle$ inv.

HF Jordan-alakra végigmenni szabályosan.

V/22 Mikor van véges sok inv. altér?

Válasz: $m(x) = \pm k(x)$

Ha van 2-dim s. altér $\Rightarrow$ ∞ sok altér

$\Rightarrow$ ∀s. altér 1-dim. Mind inv.

csak 1 Jordan-blokk tartozhat hozzá. ($\mathbb{C}$ felett)

$$\begin{array}{ccc} & b_2 & b_3 \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right]$$

b_3, b_2 is saját 2-höz.

csak 1 blokk $\forall\, \lambda$-hoz.

akkor a mérete n_i

$\sum n_i = n$

$m(x)$-ben $(x-\lambda_i)^{n_i}$

$\prod = g(x)$.

$\mathrm{gr}\; m(x) = n$.

$m(x)$ foka n

$\Rightarrow$ csak véges sok inv. altér.

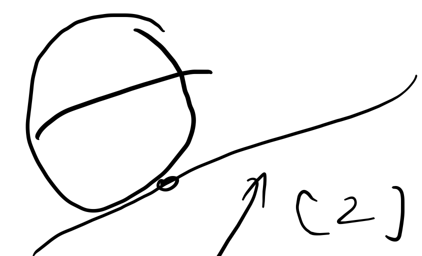
$$\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$W \ni v = \underset{\neq 0}{\lambda_1} e_1 + \underset{\neq 0}{\lambda_2} e_2$

$\Rightarrow e_1, e_2 \in W$.

6db.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$



(2)

$\langle b_3 \rangle$

$\langle b_2, b_3 \rangle$ — egész

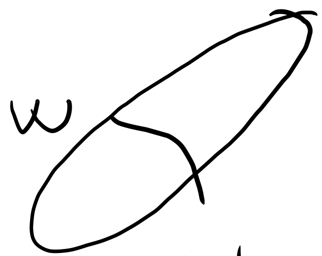
$\langle b_2 \rangle$ $\quad$ $\langle b_3 \rangle$

$\{0\}$

T | (23 | 15

$k(x)$ irred $\iff$ csak a két triviális inv. altér van.

<u>Biz</u>



$m_B \mid m_A \mid k(x)$

$A|_W = B$

$m_B = k(x)$

$\operatorname{gr} m_B \le \operatorname{gr} W$.

$\Rightarrow W$ az egész.

Megford HF. valódi inv. altér kell $f(A)$-s mindenel.