T/14/(3)

$i \in U$

$i \cdot i = -1$

$\notin U.$

U altér $\mathbb{R}$ felett, nem altér $\mathbb{C}$ felett

W altér

$3\cdot|\ 2u+6v \in W$ $\Rightarrow$ u, v benne van.

$2\cdot|\ 3u+v \in W$

$-\quad 18v-2v \in W \Rightarrow 16v \in W \Rightarrow v \in W.$

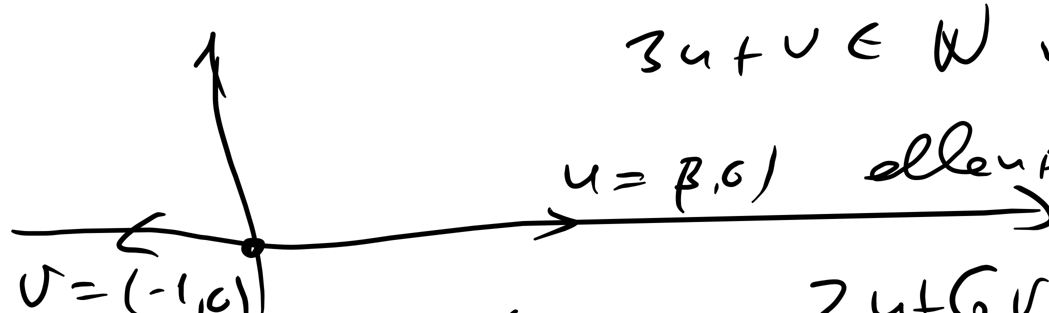
$\Rightarrow u \in W$

$3u+v \in W$ miatt.

(4) $2u+6v \in W$

$3u+5v \in W$

$3/2 \cdot$ első $= 2.$



ellenp.

$W = \{0\}$

$2u+6v = 0$

$|u \stackrel{?}{=} -3v|$

$x \in \langle x^2-1, x^2-2, 3x+2 \rangle = U$

$x^2-1 \in U$

$x^2-2 \in U$

$-$ $1 \in U \Rightarrow 3x \in U \Rightarrow x \in U.$

$3x+2$

$\langle x, x^2+2, x+2 \rangle = \langle 1, x+1, x^2+1 \rangle$

Igen $x, x^2+2, x+2 \in$ — " —

$\Rightarrow$ $\ni 1, x+1, x^2+1$

Előző wedner ugy. HF.

lemma!

17. $c \in \langle a, b \rangle \Rightarrow c = \alpha a + \beta b$

$a \notin \langle b, c \rangle \Rightarrow$ a-t nem lehet kifejezni $\Rightarrow \alpha = 0.$

$b \notin \langle a, c \rangle \Rightarrow \beta = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow \boxed{c = 0}$

18. $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

$\{0\}$ is.

$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{U \text{ altér} \\ X \subseteq U}} U \Rightarrow \langle \emptyset \rangle = \bigcap_{U \text{ altér}} U = \{\underline{0}\}$

$\emptyset$ lin. komb $= \emptyset$ össz $= \underline{\underline{0}}$.

$\underline{V = \langle v \rangle}$ alterei csak $\{\underline{0}\}$ és az egész.

dim-val is lehet.

Elemien: U altér $\{\underline{0}\} < U \leq V$.

kell $U = V$.

$\{\underline{0}\} \neq U \Rightarrow \exists\, u \in U,\ u \neq 0$. $\rightarrow \alpha \neq 0$

$\underline{\langle v \rangle \ni \lambda v}$

$u \in \langle v \rangle = u = \alpha v$.

$v = \alpha^{-1} u$

$\lambda v = \alpha^{-1} \cdot \lambda u \in \langle u \rangle \subseteq U$.

$\Rightarrow \lambda v \in U \Rightarrow V = U$.

19. V vektortér a T fölött

Ha T ∞ test: csak $\{0\}$

és $\langle v \rangle$ 1-dim.

$v \neq 0$

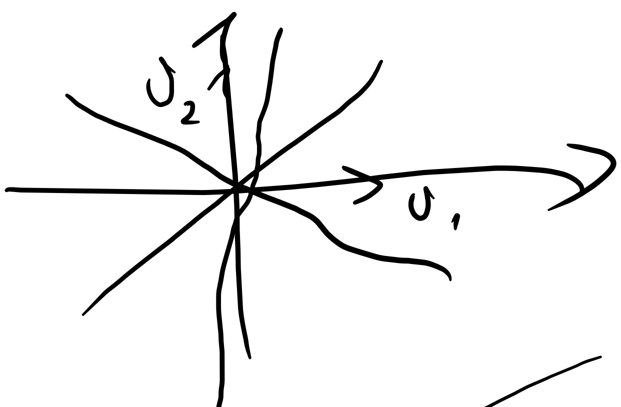
$(\leq 1\text{-dim})$.

2dik altér: olétő.

Ha ≥ 2-dimenziós $U \leq V$.

$\exists$ 2 F vektor $\Rightarrow$ $\exists$ ∞ sok altér

∞ sok egyenes.



v_1, v_2 F

$\langle v_1 + \lambda v_2 \rangle \neq \langle v_1 + \mu v_2 \rangle$

ha $\lambda \neq \mu$.

$\Rightarrow$ ez ∞ sok, mert T ∞.

$\Rightarrow$ $v_1 + \lambda v_2 \in \langle v_1 + \mu v_2 \rangle$

$= \alpha(v_1 + \alpha\mu v_2)$

$\Rightarrow \underbrace{(1-\alpha)}_{0} v_1 + \underbrace{(\lambda - \alpha\mu)}_{0} = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \lambda = \mu$ ↯.

19. Véges test fölött

dim V ∞ : ∞ sok altér

$b_1, \ldots, b_2, \ldots$ ∞ sok (F) vektor

($\forall$ véges sok (F))

$\langle b_1 \rangle \subsetneq \langle b_1, b_2 \rangle \subsetneq \ldots$ $\Rightarrow \exists \infty$ sok.

Ha V véges, mondjuk n-dimenziós

$|V| = q^n$ ahol $q = |T|$ elemszám.

$(|T^n| = q^n)$

$b_1, \ldots, b_n$ bázis

$\sum \lambda_i b_i$ egyért.

$\Rightarrow V$ véges $\Rightarrow$ véges sok részhalmaz

$\Rightarrow$ véges sok altér.

(20.) Igaz/hamis? → **hamis**

$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ van $\Rightarrow$ hamis.

Ha hamis $\Rightarrow$ adjon ellenpéldát (IF).

(21.) Bizonyítás: $(0+0)v = 0v + 0v \quad / + (-0v)$

$0+0 = 0$

$0v - 0v = (0v + 0v) - 0v$ (asszociativitás)

$0v - 0v = 0$

$0v + (0v - 0v) = 0v + 0 = 0v$.

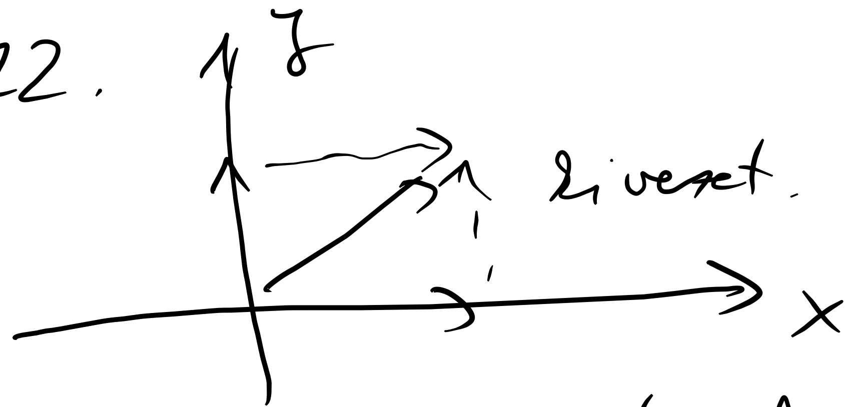
$\lambda + (-\lambda) = 0$, $0v = 0$:

$(\lambda + (-\lambda))v = \lambda v + (-\lambda)v$

λv-nek $(-\lambda)v$ az ellentettje

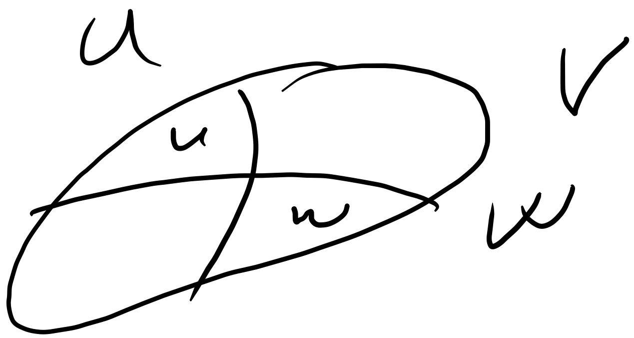
$\Rightarrow (-\lambda)v = -\lambda v$. stb.

22.



$\cup$ altér $\iff$ valamelyik része a másiknak.

x-tengely $\cup$ y-tengely nem altér



$U, W \le V$

$u + w \in U \cup W$.

$\Rightarrow u + w \in U$, $u \in U$ $\Rightarrow w \in U$

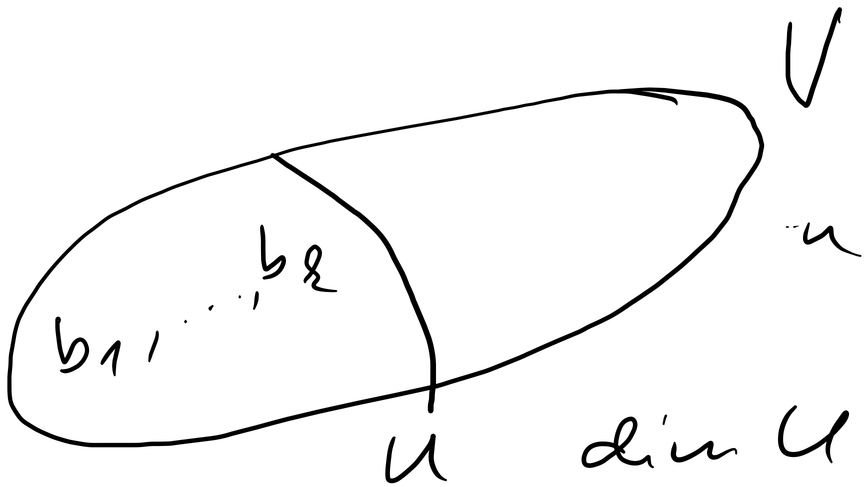
vagy

$\Rightarrow u + w \in W \Rightarrow u \in W$

$\left.\begin{array}{l} u \in U \\ u \notin W \\ w \in W \\ w \notin U \end{array}\right\}$ $U \cup W$ nem altér.

Ha viszont $\left.\begin{array}{l} U \not\subseteq W \\ W \not\subseteq U \end{array}\right\}$ együtt nem $\iff$ egyik része a másiknak $\Rightarrow \cup$ altér

23. $\dim V = n \quad |T| = q.$



$|V| = q^n$

$U \quad \dim U = k.$

$b_1, \dots, b_k$ bázis. $\quad b_1 \neq 0 \quad q^n - 1.$

$b_2: \{b_1, b_2\}$ F $\iff b_2 \notin \langle b_1 \rangle. \quad q^n - q.$

$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0 \Longleftarrow b_2 \notin \langle b_1 \rangle$

$b_1 \neq 0 \Longrightarrow \lambda_2 \neq 0 \Longrightarrow b_2$ kif-ató b_1-gyel.

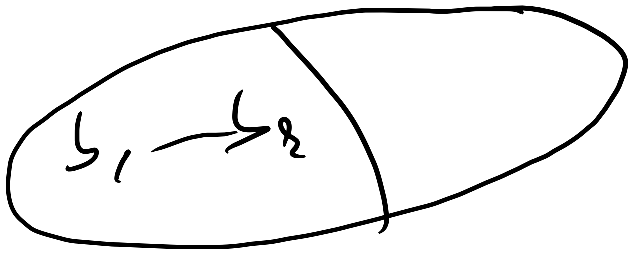
$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

Hasonlóan $b_1 \dots b_i$ F $\iff b_i \notin \underbrace{\langle b_1, \dots, b_{i-1} \rangle}$

$b_i: \quad q^n - q^i$ -féleképp. feltétele F.

$b_1, \dots, b_k$

$$(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})$$



Ezt az alteret annyiféleképp számoltuk, ahány $(b_1, \dots, b_k)$ sorozat, ebből kiválasztható.

Előző szerint $(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})$

Eredmény:

$$\boxed{\frac{(q^n-1)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)\cdots(q^k-q^{k-1})}}$$

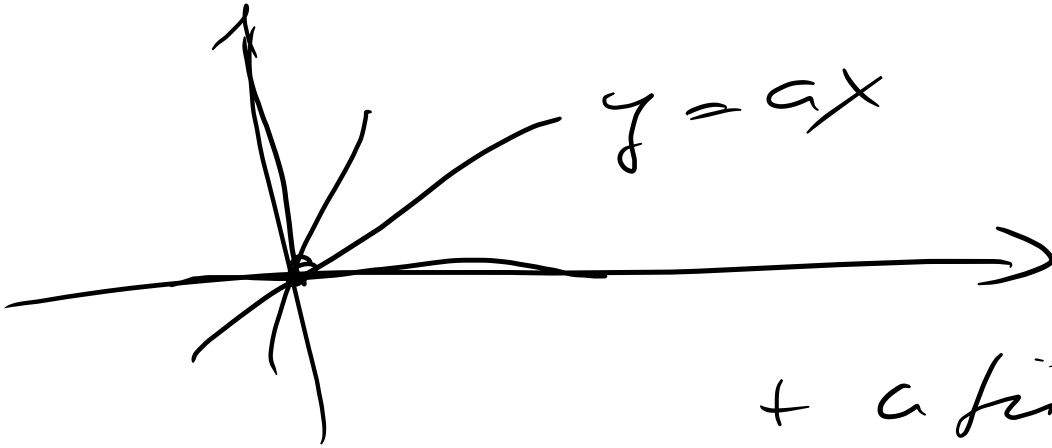
Spec. $k=n$: $\boxed{1}$ (valódi altér is!!!!)

$k=0$: $1/1$ (üres sorozat).

$n=2$, $k=1$

Sima kép egyenes?

$$\frac{q^2-1}{q-1} = \boxed{q+1}$$



ahány „a” van

$\boxed{9 \text{ db}}$

+ a függőleges $x = 0$

$\boxed{n-1\text{-dim?}}$ k-dim és $n-k$-dim?

B $b_1, \dots, b_n$ F + G $\Leftarrow$ $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ egész tér.

bázis. dim = n = bázis elemszáma.

Ha már tudom, hogy dim = n, akkor

$v_1, \dots, v_n$ F $\Rightarrow$ B (tehát G)

$v_1 \dots v_n$ G $\Rightarrow$ B (tehát F).

$v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ ÖF.

(1,1) és (2,2) => nem F => nem B.

(0,1) és (1,1) ==> dim $\mathbb{R}^2 = 2$, mert

∃ "valásos" bázis:

(1,0) és (0,1)

(1,1) és (1,−1) lf

(0,1), F (1,1) => B

2 db = dim

(1 2 3) (1 2 4) (1 2 5) ÖF

(1 2 3) (0 1 0) (3 2 1) lf

(1 1 1) (1 2 4) (1 3 9) VANDERMONDE!

(1 2 3) (4 5 6) (7 8 9) ÖF

3 db : elég F-et vizsgálni!

nem kell.

=> (0,1) lf (1,1) ✓

$\alpha(0,1) + \beta(1,1) = (x,y)$ ($\forall x,y$-ra ∃ α,β.)

$(0\cdot\alpha + 1\cdot\beta,\ \alpha+\beta) = (x,y)$

∃. m.o. $\beta = x$, $\alpha+\beta = y$ => $\alpha = y - x$. ✓

G => B

$[(x,y)]_{((0,1),(1,1))} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}y-x\\ x\end{bmatrix}}$

$[(x,y)]_{((1,0),(0,1))} = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$ Vandermonde det $\neq 0 \Rightarrow$ F $\Rightarrow$ R

F-e

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$ ÖF középső a két vele álló átlaga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$ ÖF. 2 vele álló átlaga a középső.

Van 2 öf sor!

2 sor = 2. elő.

$\det M^T = \det M$.

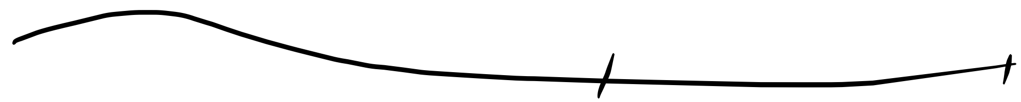
$\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ B $\quad v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

$$\Rightarrow [v]_{\underline{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dim. számítás.

Dim = az adott halmazban egy elemet hány számmal lehet kijelölni.

Pl.



1-dim   0 Bp.

Felületen: 2-dim GPS-koord 2db.

Térben: 3-dim kell a magasság is.

Példa Térben $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ vektorok bázis dim = 3.

T^n-ben dim = n $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i.$

$\mathbb{C}$ valós fölött 2-dim $1, i$ vektorok B.

$T[x]$ $\leq n$ fokú $1, x, \ldots, x^n$ B vektorok

dim = $\boxed{n+1}$.

Példa

HFT|3

≤ 3. fokú pol $\mathbb{R}$ fölött

$\mathbb{R}(x)$-ből dim 4.

és 1 szöre.

valódi altér

$\exists\, 3$ F dim ≤ 3

dim=3 $\Leftarrow$

$x-1,\ x(x-1),\ x^2(x-1)$ | x

G

≤ 3. fokúak

dim = 4.

van $x-1,\ x^2-1,\ x^3-1$ $f(1)=0$

$a+bx+cx^2+dx^3$

$f(1)=0=a+b+c+d$

Hány számot kell megtelefonálni?

3-at, mert a negyedik kiszámolható

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim = 3}$

3 F Csupa kül. fokú F

I. feladatsor 4. F.

G $f(x) = (x-1)(\alpha+bx+\gamma x^2) = \alpha(x-1) + \beta(x(x-1)) + \gamma(x^2(x-1))$ G

$f(1)=1$

Tétel

U-ban

U altér

$U \lneqq V$

valódi altér

$\Rightarrow$

$\dim U \lneqq \dim V$

$x-1,\ x^2-1,\ x^3-1$ is B

$\Rightarrow$ dim=3

1-dim tér. I/18.

∀ valódi altér < 1-dim $\Rightarrow$ $\{0\}$ és V
2 altér
van csak.

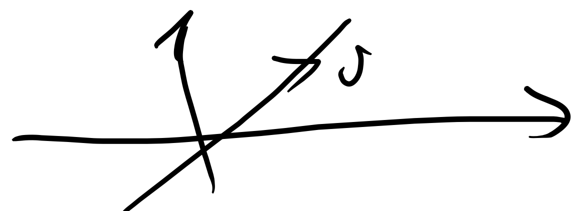
Sík alterei

$\{0\}$, egész sík.

0-dim   2-dim

∀ valódi altér ≤ 1-dim
ha nem $\{0\}$: 1-dim.

1-dim $= \langle v \rangle$, $v \neq 0$ $\Rightarrow$ origón átmenő egyenes.



Tehát: 0, egész, origón átmenő
egyenesek 1-dim
sík 2-dim.